



**INSTYTUT EKONOMIKI ROLNICTWA  
I GOSPODARKI ŻYWNOŚCIOWEJ  
PAŃSTWOWY INSTYTUT BADAWCZY**

**Prognozowanie  
cen surowców rolnych  
z wykorzystaniem  
modeli szeregów  
czasowych**

**nr 10**

**Warszawa 2011**



**KONKURENCYJNOŚĆ POLSKIEJ GOSPODARKI  
ŻYWNOŚCIOWEJ W WARUNKACH GLOBALIZACJI  
I INTEGRACJI EUROPEJSKIEJ**

**Prognozowanie  
cen surowców rolnych  
z wykorzystaniem  
modeli szeregów  
czasowych**





INSTYTUT EKONOMIKI ROLNICTWA  
I GOSPODARKI ŻYWNOŚCIOWEJ  
PAŃSTWOWY INSTYTUT BADAWCZY

# Prognozowanie cen surowców rolnych z wykorzystaniem modeli szeregów czasowych

*Redakcja naukowa:*

*dr inż. Mariusz Hamulczuk*

*Autorzy:*

*mgr Sylwia Grudkowska – NBP*

*dr inż. Mariusz Hamulczuk – IERIGŻ-PIB*

*mgr Katarzyna Hertel – NBP*

*mgr Cezary Klimkowski – IERIGŻ-PIB*

*dr hab. Stanisław Stańko prof. SGGW – IERIGŻ-PIB*



KONKURENCYJNOŚĆ POLSKIEJ GOSPODARKI  
ŻYWNOŚCIOWEJ W WARUNKACH GLOBALIZACJI  
I INTEGRACJI EUROPEJSKIEJ

**Warszawa 2011**

Pracę zrealizowano w ramach tematu

**Zastosowanie modelowania ekonomicznego w analizie przesłanek konkurencyjnego rozwoju sektora rolno-żywnościowego**

w zadaniu *System prognostyczny służący podnoszeniu konkurencyjności sektora rolno-żywnościowego*

Celem opracowania było przedstawienie istoty i uwarunkowań prognozowania cen surowców rolnych z wykorzystaniem modeli szeregów czasowych.

Recenzent

*prof. dr hab. Bolesław Borkowski – SGGW*

Korekta

*Joanna Gozdera*

Redakcja techniczna

*Leszek Ślipiski*

Projekt okładki

*AKME Projekty Sp. z o.o.*

ISBN 978-83-7658-152-1

*Instytut Ekonomiki Rolnictwa i Gospodarki Żywnościowej*

*– Państwowy Instytut Badawczy*

*00-950 Warszawa, ul. Świętokrzyska 20, skr. poczt. nr 984*

*tel.: (22) 50 54 444*

*faks: (22) 50 54 636*

*e-mail: [dw@ierigz.waw.pl](mailto:dw@ierigz.waw.pl)*

*<http://www.ierigz.waw.pl>*

## Spis treści

Wstęp.....	7
1. Istota prognozowania na podstawie szeregów czasowych .....	11
<i>Mariusz Hamuleczuk, Stanisław Stańko</i>	
1.1. Prawidłowości występujące w szeregach czasowych cen surowców rolnych.....	11
1.2. Analiza i pomiar prawidłowości .....	17
1.3. Ekstrapolacja prawidłowości .....	25
1.4. Metody prognozowania na podstawie szeregów czasowych.....	29
2. Metodologia ARIMA .....	35
<i>Mariusz Hamuleczuk</i>	
2.1. Modele ARIMA .....	35
2.1.1. Procesy stacjonarnych szeregów czasowych .....	36
2.1.2. Procesy niestacjonarnych i sezonowych szeregów czasowych .....	39
2.2. Identyfikacja modeli ARIMA .....	41
2.3. Estymacja i weryfikacja modeli ARIMA.....	50
3. Metody sezonowej korekty danych: X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS.....	55
<i>Sylwia Grudkowska</i>	
3.1. Wprowadzenie.....	55
3.2. Metoda X-12-ARIMA.....	56
3.2.1. Model RegARIMA.....	60
3.2.2. Algorytm X-11 .....	72
3.3. Metoda TRAMO/SEATS .....	75
3.3.1. Algorytm TRAMO .....	76
3.3.2. Procedura SEATS.....	77
3.4. Walidacja modelu.....	81
4. Analiza i modele szeregów czasowych cen zbóż i cen mleka .....	93
<i>Sylwia Grudkowska</i>	
4.1. Ceny pszenicy .....	93
4.2. Ceny żyta.....	103
4.3. Ceny mleka.....	116

5. Analiza i modele szeregów czasowych cen skupu żywca .....	125
<i>Katarzyna Hertel</i>	
5.1. Ceny żywca wieprzowego.....	125
5.2. Ceny żywca drobiowego .....	134
5.3. Ceny wołowiny .....	144
6. Weryfikacja empiryczna metod prognostycznych .....	155
<i>Mariusz Hamuleczuk, Cezary Klimkowski</i>	
6.1. Metodyka oceny przydatności metod.....	155
6.1.1. Metodyka oceny prognoz wygasłych.....	156
6.1.2. Prognozy naiwne .....	158
6.1.3. Prognozy ekspertów ARR.....	160
6.2. Dokładność prognoz obliczonych z wykorzystaniem modeli RegARIMA oraz TRAMO.....	162
6.3. Dokładność prognoz obliczonych z wykorzystaniem modeli ARIMA .	173
6.3.1. Pszenica .....	175
6.3.2. Żyto.....	177
6.3.3. Mleko.....	180
6.3.4. Żywiec wieprzowy .....	182
6.3.5. Żywiec wołowy .....	184
6.3.6. Żywiec drobiowy.....	187
Podsumowanie.....	191
<i>Mariusz Hamuleczuk</i>	
Literatura .....	197

## Wstęp

Przewidywanie przyszłości towarzyszy człowiekowi niezależnie od stopnia rozwoju społeczno-gospodarczego. Podejmując jakąkolwiek decyzję, człowiek zmuszony jest dokonać pewnych założeń co do obrazu rzeczywistości w horyzoncie objętym decyzjami. Pozwalają one oszacować szansę osiągnięcia zmierzonych celów czy konsekwencje podjętych decyzji. W tym znaczeniu przewidywanie stanowi jeden ze sposobów ograniczania negatywnych konsekwencji przedsięwziętych działań. Innymi słowy, poprzez prognozowanie przyszłości staramy się minimalizować ryzyko towarzyszące podjętym decyzjom. Należy zdać sobie sprawę, że jakość formułowanych prognoz nie zawsze jest zadowalająca. Powszechnie można się spotkać z opinią, że prognozowanie jest pewnym rodzajem spekulacji. Niektórzy ekonomiści twierdzą wręcz, że prognozowanie złożonych zjawisk ekonomicznych jest w istocie niemożliwe. Niemniej jednak zawsze wśród spekulantów znajdują się tacy, którzy mając dobre rozeznanie rynkowe, potrafią prognozować trafniej od innych, dzięki czemu wygrywają.

Na tym polega istota i sens tworzenia prognoz. Posiadając większą wiedzę o prawidłowościach rynkowych, metodyce, można ją wykorzystać do zdobycia przewagi względem innych uczestników rynku. To implikuje dwie podstawowe sprawy związane z prognozowaniem. Po pierwsze, prognozowanie jest sposobem zdobywania przewagi konkurencyjnej nad innymi uczestnikami rynku. Po drugie, w gospodarce rynkowej nie może istnieć jedna wiarygodna prognoza zbudowana przez np. instytucję centralną, która stanowiłaby podstawę podejmowania decyzji gospodarczych przez ogół podmiotów rynkowych. Każdy uczestnik rynku ma własne oczekiwania co do przyszłości.

Warto więc przedstawić w tym kontekście rolę i zakres badań prowadzonych w ramach zadania „System prognostyczny służący podnoszeniu konkurencyjności sektora rolno-żywnościowego”. Otóż jego celem jest stworzenie przesłanek metodycznych do częstszego niż obecnie wykorzystywania metod ilościowych w prognozowaniu na rynkach rolnych. Efektem bezpośrednim byłoby wykorzystanie tej wiedzy przez analityków pracujących w IERIGŻ-PIB (i nie tylko) przy tworzeniu raportów rynkowych, w których ważną rolę odgrywają prognozy. Z drugiej strony jest to wiedza, która dzięki upowszechnieniu może być wykorzystywana przez uczestników rynku (producenci rolni, przetwórcy, handlowcy), analityków rynkowych, doradców itp.

Ponieważ przyświeca nam cel użyteczny, jakim jest upowszechnianie metod ilościowych, musimy zdać sobie sprawę, że odbiorcy reprezentują zróżnicowany poziom w zakresie znajomości podstaw statystyki, ekonometrii czy



prawidłowości ekonomicznych. Dlatego też charakter prezentowanych metod i aplikacji będzie cechował się różnym stopniem wyrafinowania.

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie możliwości prognozowania cen surowców rolnych na podstawie metod szeregów czasowych. Mówiąc o metodach szeregów czasowych, mamy na myśli te, w przypadku których nie wykorzystujemy żadnych dodatkowych informacji. Stąd w rozważaniach pominiemy modele VAR czy VECM, które stanowią pomost pomiędzy modelami szeregów czasowych a strukturalnymi modelami opisującymi powiązania z innymi zjawiskami w systemie.

W badaniach ograniczono się do prognozowania cen surowców rolnych, które to charakteryzują się największą zmiennością spośród cen w łańcuchu żywnościowym. Badaniom poddano ceny najważniejszych surowców pochodzących z różnych rynków towarowych: zbóż, mięsa i mleka. Analizowano nominalne miesięczne ceny skupu: pszenicy, żyta, mleka, żywca wieprzowego, żywca drobiowego i żywca wołowego. Okres badawczy obejmował lata 1996-2011, z czego w ostatnich trzech latach analizowano dokładność prognoz wygasłych.

Z punktu widzenia podejmowania decyzji gospodarczych, najbardziej interesujące wydają się być prognozy krótkookresowe. Krótki okres to taki, w którym producent rolny nie jest w stanie dokonać modyfikacji proefektywnościowych w swoim potencjale ani zmienić wielkości produkcji. Nie wnikając głębiej, za okres ten przyjęto jeden rok. W powyższym świetle za cel postawiono ocenę, na ile metody szeregów czasowych pozwalają na generowanie wiarygodnych krótkookresowych prognoz cen surowców rolnych. Jakie są zalety i jakie ograniczenia powszechnie stosowanych modeli prognostycznych?

Opracowanie obejmuje sześć rozdziałów i zakończone jest podsumowaniem. Pierwszy rozdział zawiera wprowadzanie do prognozowania na podstawie szeregów czasowych. Przedstawiono w nim ogólną charakterystykę prawidłowości występujących w szeregach czasowych cen surowców rolnych, sposoby ich pomiaru, warunki ekstrapolacji tych prawidłowości w przyszłość oraz ogólny wstęp do metod szeregów czasowych.

W rozdziale drugim przedstawiono metodyczne kwestie prognozowania na podstawie modeli autoregresji i średniej ruchomej. Przedstawiono podstawowe modele, sposoby ich identyfikacji, estymacji oraz weryfikacji.

Rozdział trzeci zawiera metodyczne kwestie pomiaru prawidłowości występujących w szeregach czasowych z wykorzystaniem metod X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS. Stanowi on rozszerzenie rozważań zawartych w rozdzia-

le trzecim o nowoczesne narzędzia analizy i prognozowania zawarte w programie DEMETRA+.

Rozdział czwarty i piąty obejmują empiryczną analizę kształtowania się szeregów czasowych wybranych cen surowców rolnych w latach 1996-2011. Wykorzystano w tym celu modele X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS. Równocześnie dokonano wyboru i oceny modeli prognostycznych RegARIMA oraz TRAMO, które można rekomendować do prognozowania cen poszczególnych surowców rolnych.

W rozdziale szóstym przedstawiono wyniki badania zdolności prognostycznej poszczególnych modeli. Przeprowadzono analizę prognoz wygasłych oraz przeanalizowano, na ile prognozy z modeli szeregów czasowych są konkurencyjne w stosunku do prognoz z modeli jakościowych. Na końcu opracowania zawarto podsumowanie, w którym przedstawiono najważniejsze wnioski będące rezultatem prowadzonych badań.



# **1. Istota prognozowania na podstawie szeregów czasowych**

Podstawą przewidywania na podstawie modeli szeregów czasowych są wnioski z obserwacji prawidłowości występujących w okresie historycznym. Niniejszy rozdział podejmuje zagadnienie sposobu określania charakteru takich prawidłowości, a także problem możliwości i warunków ekstrapolowania ich na przyszłe okresy. Warunkiem prognozowania na podstawie szeregów czasowych jest bowiem umiejętność dostrzeżenia w przeszłych zdarzeniach pewnych regularności. Pogłębienie obserwacji o jakościowy i ilościowy pomiar tych prawidłowości oraz wybór reguł, zgodnie z którymi będą one ekstrapolowane w przyszłość jest podstawą prognozowania.

## **1.1. Prawidłowości występujące w szeregach czasowych cen surowców rolnych**

Procesy ekonomiczne nie przebiegają w czasie całkowicie przypadkowo i chaotycznie. W ich kształtowaniu można dostrzec pewne prawidłowości. Skuteczne przewidywanie zjawisk i procesów gospodarczych możliwe jest tylko i wyłącznie wówczas, gdy zidentyfikujemy takie regularności. Dostrzeżone prawidłowości są bowiem wyrazem działania różnych czynników i mechanizmów, których rezultat będzie najpewniej widoczny również w przyszłości. Jednak czynniki kształtujące zachowanie w czasie szeregów determinują konieczność zdarzeń tylko do pewnego stopnia. Wciąż istotny jest element przypadkowości, a także wpływu mechanizmów dotychczas niezauważonych bądź nieobecnych. Dotyczy to zwłaszcza działalności gospodarczej. Niemniej gdyby procesami gospodarczymi rządził wyłącznie przypadek, przewidywanie przyszłości byłoby niemożliwe.

Znajomość pojawiających się w przeszłości zależności pozwala wyjaśnić szereg prawidłowości występujących w otaczającym nas świecie oraz stanowi podstawę do budowy prognoz. W celu wyjaśnienia występujących prawidłowości w otaczającej nas rzeczywistości trzeba ujmować fakty w pewnych ramach teoretycznych. Teoria z jej pojęciami, prawami i hipotezami pomaga nam dostrzec związki między zjawiskami. Ona też decyduje o sądach na temat przyszłości i sposobie postrzegania teraźniejszości. Nieadekwatność ujęć teoretycznych, odwzorowujących rzeczywistość i zmian, jakie w niej zachodzą, pociąga za sobą błędy w identyfikacji oraz pomiarze zjawisk i procesów, a dalej jest źródłem błędów w prognozowaniu [Makridakis i Wheelwright 1989].

Podstawą dla prognozowania cen surowców rolnych jest wiedza na temat prawidłowości rynkowych zachodzących w rolnictwie i jego otoczeniu, tzw. agrobiznesie. Wiedza ta jest pochodną wykształcenia, doświadczeń oraz bieżących informacji, z jakimi uczestnicy rynku i progności mają do czynienia. Rolnictwo i rynek surowców rolnych, bo na nim koncentrujemy naszą uwagę, charakteryzuje się specyficznymi cechami, które powodują pewne odmienne zachowania rynkowe, w porównaniu do rynków artykułów przemysłowych czy usług. W szczególności chodzi tu o większą zmienność cen niż na rynkach innych produktów [Heijman i inni 1997].

Kształtowanie się cen surowców rolnych na rynku krajowym jest wynikiem oddziaływania wielu elementów, takich jak:

- prawa popytu i podaży,
- biologiczno-technicznego charakteru produkcji rolnej (strona podażowa),
- pośredniego powiązania rynków surowcowych z konsumentem (strona popytowa),
- powiązań międzyrynkowych,
- powiązania z cenami światowymi,
- oddziaływanie instrumentów polityki ekonomicznej, głównie polityki rolnej i handlowej [Hamulczuk, Stańko 2011].

Czynniki te zostały już omówione szerzej przez Tomka i Robinsona [2001] oraz w cytowanym wyżej opracowaniu. Natomiast podstawowe pytanie brzmi, czy w sytuacji oddziaływania takiej mnogości przedstawionych czynników, informacje tylko i wyłącznie dotyczące kształtowania się cen historycznych pozwalają trafnie przewidywać przyszłe ich wartości. Należy się zastanowić, czy możliwe jest konstruowanie celnych prognoz, abstrahując od wpływu poszczególnych czynników. Jest bowiem intuicyjnie oczywiste, że pominięte uwarunkowania wpływają na przebieg cen surowców rolnych. Czy przykładowo nie byłoby lepiej, gdyby uzależnić prognozę od zmiennych reprezentujących powyższe czynniki?

Nie zawsze jest celowe i możliwe wyodrębnienie wszystkich przyczyn, które wpływają na dane zjawisko, np. ceny rolne. Często lepiej i taniej jest jedynie rozpatrywać skutki tych przyczyn w postaci przebiegu zjawiska w czasie. Takie podejście ułatwia przewidywanie przyszłości nawet wówczas, gdy nie mamy możliwość identyfikacji czynników wpływających. Ważne są koszty opracowywania analiz i prognoz na podstawie szeregów czasowych, które mogą być znacząco niższe niż w przypadku badań prowadzonych na olbrzymich zbiorach informacji.

Istota prognozowania na podstawie szeregów czasowych opiera się na założeniu, że w zjawisku prognozowanym znajdują odzwierciedlenie wszystkie powyższe uwarunkowania, czyli wszystkie czynniki, które na nie wpływają. Szczególnie dotyczy to cen. Uczestnikom rynku znane jest powiedzenie, że ceny odzwierciedlają wszystkie znane i istotne informacje. Zakładając jego trafność, nie ma potrzeby badania ich przyczyn. Ceny – lub inny dowolny proces – można potraktować jako tzw. czarną skrzynkę, a wnikanie w przyczyny współzależności z innymi zjawiskami nie jest konieczne.

Skoro nie badamy powiązań z innymi zmiennymi, nie szacujemy związków przyczynowo-skutkowych, to jakie prawidłowości występują w szeregach czasowych? Ogólnie przyjmuje się, że prawidłowości te ukryte są w postaci pewnej struktury szeregu czasowego. Część prawidłowości ma charakter systematyczny, regularny, a część przypadkowy. Szereg czasowy składać się może z następujących niezależnych od siebie składowych:

- tendencji rozwojowej (trendu),
- wahań cyklicznych,
- wahań sezonowych,
- wahań przypadkowych.

Poniżej pokrótce przedstawione zostaną związki między tymi składowymi a mechanizmami zmian cen w czasie. Ma to olbrzymie znaczenie w rozumieniu wyników analiz statystycznych oraz jest pomocne w prognozowaniu i merytorycznej ocenie realności prognoz.

Wszelkie zmiany cen dokonują się wokół tendencji rozwojowej (trendu). Tendencję definiuje się jako długookresową skłonność do jednokierunkowych zmian wartości zmiennej w czasie. W jej ramach możemy założyć, że zjawisko charakteryzuje się trendem horyzontalnym (brakiem zmian, stałym poziomem), stopniowym spadkiem lub wzrostem. Obserwowane w rolnictwie i gospodarce żywnościowej trendy są pochodną m.in. innowacji technicznych, zmian preferencji i upodobań konsumentów, bądź też ogólnym poziomem inflacji. Można uznać, że tendencja nie reprezentuje zmienności decydującej o poziomie ryzyka cenowego. Każdy obecny na rynku ma czas na dostosowanie się do zmian długookresowych poprzez zmiany technologii, koncentrację produkcji czy obniżenie kosztów. W efekcie długookresowa elastyczność podaży jest znacznie wyższa od elastyczności krótkookresowej.

Wokół trendu mają miejsce różnego rodzaju odchylenia, w tym wahania cykliczne przejawiające się w postaci mniej lub bardziej regularnych fluktuacji wokół trendu. Wahania cykliczne są zmianami średnio- i długookresowymi. Należy pamiętać, że okres wahań cyklicznych, mierzony np. między dwoma

górnymi lub dwoma dolnymi punktami zwrotnymi (między maksimami lub minimami) jest dłuższy od jednego roku. Mogą co prawda zdarzać się krótsze wahania cykliczne (niezwiązane z sezonowością), ale do ich analizy potrzebne są dane o dosyć dużej częstotliwości (dziennie, godzinowe). W niniejszych badaniach nie będziemy się zajmowali tego typu wahaniami cyklicznymi.

Samo rozróżnienie wahań cyklicznych i trendu jest dosyć problematyczne na gruncie metodycznym. Obydwa rodzaje wahań wyrażają bowiem zmiany długookresowe i często nie są rozdzielane, ale traktowane jako długookresowy trend (tzw. trend-cykl). Za takim podejściem przemawia fakt, że w rzeczywistości gospodarczej występują cykle o różnej długości, często nakładające się na siebie. Kwestią zasadniczą pozostaje jedynie, jaki typ wahań jesteśmy w stanie „uchwycić”. Mając dwa szeregi czasowe tych samych cen miesięcznych, ale o różnej długości (np. jeden liczący 10 lat, a kolejny 100 lat), może okazać się, że uzyskamy różne szacunki trendu i cykli dla wspólnego dla nich przedziału czasowego. To co dla krótkich danych będzie się wydawało trendem, może okazać się dobrym przybliżeniem cyklu, łatwo zauważalnym dla dłuższych szeregów czasowych. Cykle o różnej długości pozostają wobec siebie w określonej zależności. Krzywa cyklu dłuższego jest trendem cyklu krótszego (niższego rzędu). Faza wzrostowa cyklu dłuższego przedłuża fazę wzrostową cyklu krótszego, faza spadkowa cyklu dłuższego przedłuża fazę spadkową cyklu krótszego.

Z poznawczego punktu widzenia ważne jest określenie czynników leżących u podstaw wahań cyklicznych w gospodarce rolno-żywnościowej. Należą do nich przyczyny o charakterze biologiczno-technicznym, ekonomicznym oraz uwarunkowania zewnętrzne, np. susze, które inicjują występowanie cykli. Należy także mieć na uwadze, że wahania te mogą być powiązane zarówno z koniunkturą ogólnogospodarczą, jak i występować w postaci cykli towarowych (specjalnych). Zmiany cykliczne dokonują się pod wpływem wielu dodatkowych uwarunkowań, takich jak interakcje między rynkami, reakcje psychologiczne czy oczekiwania gospodarcze.

Do głównych czynników powodujących występowanie wahań cyklicznych cen surowców rolnych należą ograniczenia biologiczno-techniczne. Specyfika produkcji rolniczej powoduje, że od podjęcia decyzji o rozpoczęciu danej produkcji, do pojawienia się towarów na rynku, upływa pewien okres. Produkcja może być planowana w oparciu o różnego rodzaju sady. W naiwnym modelu zachowań producent bierze pod uwagę wyłącznie bieżącą sytuację. Zachowanie adaptacyjne oznacza planowanie na podstawie oceny przeszłej i bieżącej sytuacji. Wreszcie, całkowicie racjonalny producent dokonuje oceny przyszłej sytuacji w oparciu o wiedzę na temat stanu przeszłego, bieżącego i na podstawie oczekiwań co do przyszłości. W przypadku zmiany uwarunkowań gospodar-

czych, czy też oczekiwań, małe są możliwości zmian struktury po rozpoczęciu produkcji i dostosowania jej do zmieniającej się sytuacji rynkowej. Podaż rynkowa jest zatem zawsze w większym stopniu funkcją cen przeszłych, a nie bieżących. Efektem tego mechanizmu (znanego jako model pajęczyny popytowo-podażowej) są wahania cykliczne produkcji i cen surowców rolnych. Szerzej model ten wyjaśnia Tomek i Robinson [2001]. Długość cyklu zależy od okresu dzielącego moment podjęcia ostatecznej decyzji co do kształtu produkcji do momentu, w którym produkcja ta jest rzeczywiście realizowana.

Niewielkie zmiany w podaży surowców rolnych powodują bardzo duże wahania ich cen. Wedle tego mechanizmu reakcją na wysokie ceny – w okresach niedoborów – są decyzje o zwiększeniu produkcji. Niezależnie czy mamy do czynienia z produkcją roślinną, czy zwierzęcą, od momentu podjęcia decyzji do wyprodukowania towaru mija od kilku miesięcy do kilku nawet lat. Zwiększająca się podaż prowadzi do spadku cen. Reakcją jest często zwiększanie produkcji w celu osiągnięcia zakładanych zysków poprzez wzrost skali produkcji. Te racjonalne z mikroekonomicznego punktu widzenia decyzje, powodują dalszy spadek cen, przy których producenci rolni ponoszą coraz wyższe straty. W efekcie decydują się oni na zmniejszenie produkcji, co w kolejnych okresach będzie skutkowało wzrostem cen rynkowych.

Ograniczenia biologiczno-techniczne powodują, że w krótkim okresie produkcja rolna jest wysoce nieelastyczna i nie reaguje na zmiany cen. Zdarza się, że z uwagi na wysoki udział kosztów stałych w kosztach całkowitych ponoszonych przez producentów rolnych, rolnik nie może ograniczać kosztów poprzez zmniejszenie podaży. Nawet w warunkach spadku cen może próbować pokryć koszty stałe produkując coraz więcej (efekt odwróconej reakcji).

Analizując zmiany cykliczne na rynkach rolnych w Polsce, nie możemy ograniczać się wyłącznie do przyczyn krajowych. Należy zdawać sobie sprawę, że w warunkach relatywnie otwartej wymiany handlowej, kształtowanie się cen surowców rolnych w danym państwie wynika nie tylko z krajowych relacji popytowo-podażowych, ale i z oddziaływania sytuacji na tzw. rynkach europejskich czy światowych. W istocie zmiany krajowej sytuacji popytowo-podażowej mają relatywnie niewielki wpływ na poziom cen większości surowców rolnych w Polsce w porównaniu z oddziaływaniem relacji cenowych na rynkach światowych. Konsekwencją tego jest konieczność wnikliwej obserwacji uwarunkowań kształtujących światowe i europejskie ceny surowców rolnych.

W przypadku rolnictwa – ze względu na uzależnienie procesu produkcji od czynników pogodowych – wahania najczęściej kojarzą się ze zmiennością sezonową. Wahania sezonowe przejawiają się w postaci regularnych zmian pe-



riodycznych o długości jednego roku (pomijamy cykle sezonowe dzienne czy tygodniowe). Przykładowo, na rynku zbóż efekt sezonowy objawia się spadkiem cen po okresie zbiorów. Za podstawową przyczynę wahań sezonowych należy – na rynkach rolnych – uznać cykliczną zmienność czynników klimatyczno-przyrodniczych. Szerzej rzecz ujmując, możemy napisać, że sezonowość wynika ze zmienności natężenia kosztów, podaży i obrotu rynkowego. Im mocniej ograniczona jest możliwość przechowywania surowców, tym bardziej widoczne są przejawy sezonowości. Sezonowość w kształtowaniu się cen to nic innego jak przykład oddziaływania ogólnego prawa popytu i podaży. Popyt na względnie stałym poziomie styka się ze zmienną w czasie podażą, co w efekcie prowadzi do zmian cen.

Ostatnim rodzajem zmienności obserwowanej w szeregach czasowych są wahania przypadkowe (nieregularne). Odpowiadają one za wpływ wszelkich czynników typu incydentalnego oraz tych niemożliwych do przewidzenia. Wśród zmian o charakterze nieregularnym wyróżnić można efekty wywołane przez czynniki losowe, takie jak klęski żywiołowe, nagłe zmiany w polityce państwa, strajki.

Niezwykle istotnym problemem związanym z prognozowaniem procesów zachodzących na rynkach rolnych pozostaje wpływ polityki rolnej. Ze względu na specyfikę rynków rolnych, ich funkcjonowanie zawsze było bardzo odległe od tego, w jaki sposób działa rynek w ramach modelu konkurencji doskonałej. W konsekwencji istnienia szeregu ułomności wymiany handlowej na rynkach rolnych – takich jak na przykład niedoskonałość przepływu informacji – dochodzi do zbędnej straty społecznej. Z tego też powodu rynki rolne są szczególnie silnie poddawane procesom regulacyjnym. Interwencja może być prowadzona na wiele różnych sposobów i form, wpływając na rynek i jego kategorie (podaż, popyt i ceny). Szerzej zagadnienia te przedstawiają np. Kowalski i Rembisz [2005]. Wszystkie działania interwencyjne mają swoje odzwierciedlenie w sposobie kształtowania się cen surowców rolnych. Osłabiają i deformują naturalne procesy rynkowe, przez co ceny rynkowe kształtują się nieco inaczej niż wyglądałoby to w przypadku braku tego typu rozwiązań instytucjonalnych. Problem prognostyczny polega na tym, że w większości działania te mają charakter okresowy i dosyć trudno jest oszacować wpływ netto każdej z form interwencji.

## 1.2. Analiza i pomiar prawidłowości

Można uznać, że podstawę do przewidywań stanowi wiedza o naturze zjawisk, ich wzajemnych powiązaniach oraz mechanizmach i czynnikach je kształtujących. Do zbudowania prognozy niezbędna jest poprawnie przeprowadzona diagnoza rzeczywistości, czyli stwierdzenie przeszłego oraz teraźniejszego stanu prognozowanych zjawisk. W przypadku prognozowania na podstawie szeregów czasowych analiza ta sprowadza się do analizy dynamiki szeregu czasowego, w tym poszczególnych jego składowych.

### Składowe szeregów czasowych

Rozłożenie szeregu czasowego na poszczególne elementy składowe nosi nazwę dekompozycji szeregu czasowego. Jak podano w poprzednim rozdziale, zakłada się, że kształtowanie się ceny ( $Y$ ) jest kombinacją trendu ( $T$ ), wahań cyklicznych ( $C$ ), sezonowych ( $S$ ) oraz przypadkowych ( $I$ ).

W praktyce najczęściej stosuje się dwie formuły dekompozycji wartości szeregu czasowego: modelu addytywnego lub modelu multiplikatywnego:

$$Y_t = T_t + C_t + S_t + I_t, \text{ (model addytywny),} \quad (1.1)$$

$$Y_t = T_t * C_t * S_t * I_t, \text{ (model multiplikatywny),} \quad (1.2)$$

gdzie:

$Y_t$  – wartości szeregu czasowego w czasie  $t$ ,

$T_t$  – wartości trendu (lub stałego poziomu) w czasie  $t$ ,

$C_t$  – wartości składnika cyklicznego w czasie  $t$ ,

$S_t$  – wskaźniki wahań sezonowych w czasie  $t$ ,

$I_t$  – wahania przypadkowe (losowe) w czasie  $t$ .

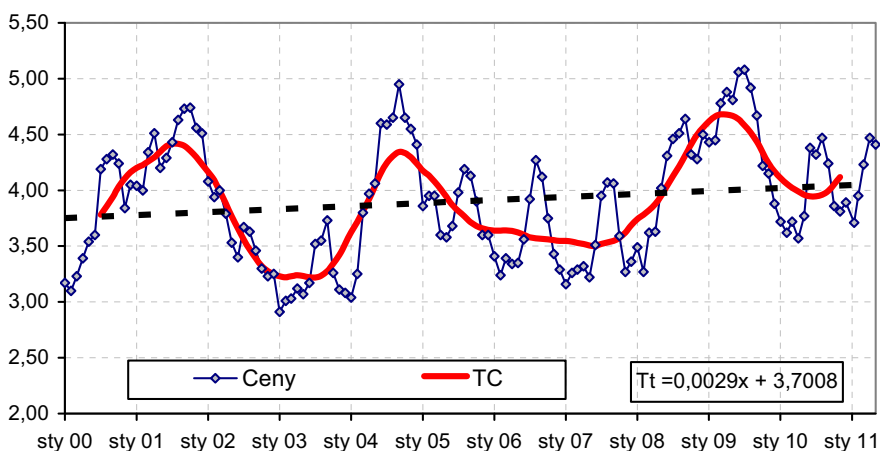
Różnica między modelem addytywnym a modelem multiplikatywnym polega na innych relacjach między składowymi. Najłatwiej to pokazać na przykładzie składnika sezonowego. W modelu addytywnym sezonowość nie jest powiązana z poziomem zjawiska w czasie. W przypadku modelu addytywnego mamy do czynienia z efektami sezonowymi, polegającymi na odchyleniach zjawiska w okresach jednoimiennych od wartości średniej w roku o stałą wartość wyrażaną w tych samych jednostkach, w których jest wyrażony szereg czasowy. Oznacza to, że np. spadek cen zbóż po okresie zbiorów jest niezależny od średniego poziomu cen w danym roku.

W przypadku sezonowości multiplikatywnej efekty sezonowe są stałe w ujęciu względnym tzn. gdy większe są wartości zjawiska wynikające z trendu,

to większa jest również amplituda wahań sezonowych lub cyklicznych. Stąd sezonowy spadek cen zbóż będzie większy, gdy mamy do czynienia z ich wysokim poziomem, a mniejszy, gdy wyjściowa cena będzie relatywnie niska. Ujęcie multiplikatywne jest częściej stosowane niż addytywne.

Podstawą oceny dynamiki jest analiza graficzna szeregu czasowego. Umiejętność formułowania wniosków w oparciu o graficzny przebieg obserwacji stanowi niezbędne minimum, jakie każdy analityk powinien posiadać. Analiza graficzna dotyczy również przekształceń danych i poszczególnych składowych szeregu czasowego. Pokróćce to pokażemy na przykładzie miesięcznych cen trzody chlewnej w Polsce w latach 2000-2011 (rysunek 1.2.1).

**Rysunek 1.2.1. Kształtowanie się cen żywca wieprzowego (zł/kg) wraz z długookresowym trendem (TC)**



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

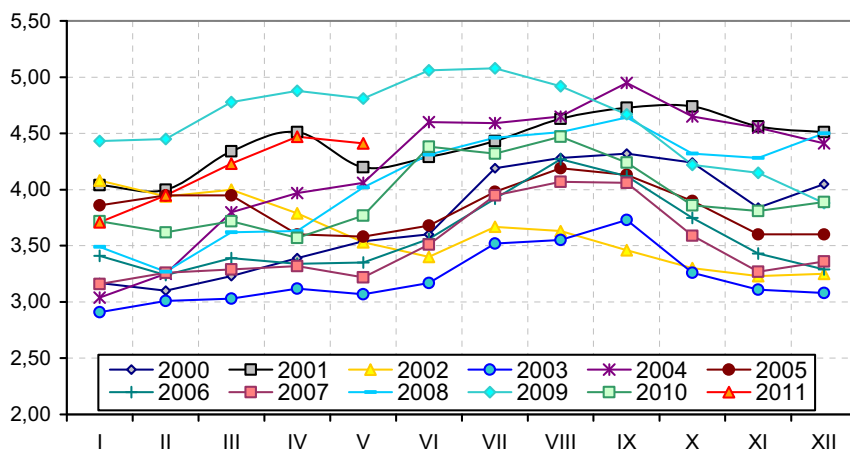
Na rysunku w postaci przerywanej linii przedstawiono trend ( $T_t$ ), zaś w postaci czerwonej ciągłej linii łącznie trend i wahania cykliczne ( $TC_t$ ). Praktyczne wyznaczenie trendu wiąże się w Excelu z zaznaczeniem wewnątrz wykresu opcji „dodaj linię trendu”. W ujęciu teoretycznym trend stanowi wyraz regresji zmiennej  $Y_t$  względem zmiennej czasowej  $t$ . Trend-cykl jest wyznaczany za pomocą średnich ruchomych 12-okresowych (dla danych miesięcznych). Kwestie te przedstawimy szerzej później.

Już na pierwszy rzut oka widzimy, że mamy do czynienia z niewielką tendencją wzrostową. Wartości maksymalne (i minimalne) co około 4 lata są na coraz wyższym poziomie. Potwierdza to dodana linia trendu: przez okres 11 lat ceny wzrosły o ponad 35 groszy, czyli około 10%.

Zauważamy też okresy, w których ceny są na poziomie 4,50-5,00 zł/kg, i okresy, kiedy ceny są bliskie 3,00-3,50 zł/kg. Takie kształtowanie się cen jest wyrazem zmian cyklicznych. Najwyższe ceny wystąpiły w roku 2001, 2004, 2009. Lata te wyznaczają górne momenty zwrotne cykli, zaś różnice między nimi pozwalają określić długość cyklu. Oznacza to, że długość cykli świńskich w tym okresie kształtuje się w przedziale 3-4 lat. Długość cykli nie jest stała, a ulega zmianom. Jest to dosyć dobrze widoczne w kształtowaniu się TC (odległości pomiędzy szczytami linii czerwonej).

Sezonowość wyraża się w postaci krótkookresowych wahań wokół trendu-cyklu. Cykl sezonowy przejawia się w niskich cenach na początku i na końcu roku, a wysokich w połowie roku. To, że są to odchylenia nieregularne, jest wynikiem oddziaływania czynników losowych.

**Rysunek 1.2.2. Kształtowanie się cen żywca wieprzowego (zł/kg) w podziale na sezony**



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Sporym – niestety dość powszechnie spotykanym – błędem wydaje się posługiwanie w analizie jedynie wykresami przedstawionymi na rysunku 1.2.2. Dzielenie szeregu czasowego na jednoimienne okresy poważnie utrudnia analizę dynamiki zjawisk, nie mówiąc o ich przewidywaniu. Można poszczególnym sezonom przypisać odpowiednie uwarunkowania i na tej podstawie dokonywać analogii. W istocie jednak, na tego typu wykresach jedynie sezonowość jest dobrze zaznaczona. Nie ma natomiast możliwości określenia tendencji rozwojowej oraz fazy cyklu, w jakiej znajdują się ceny.

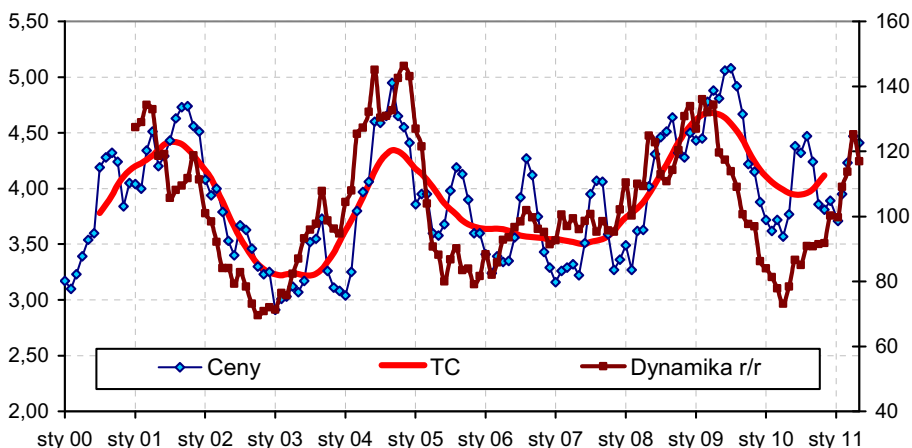
Do podstawowych sposobów analizy zjawisk w czasie należy analiza dynamiki. Mówimy tutaj o budowie indeksów dynamiki o stałej lub zmiennej podstawie. Wśród nich na uwagę zasługują indeksy, za pomocą których jesteśmy

w stanie określić dynamikę zmian w stosunku do analogicznego miesiąca roku poprzedniego. Stosuje się tutaj następującą formułę:

$$I_{Y_t/Y_{t-12}} = Y_t / Y_{t-12} * 100. \quad (1.3)$$

Ich obliczenie pozwala na analizę dynamiki zjawiska bez efektów sezonowych. W efekcie uzyskujemy coś, co kształtem przypomina składnik cykliczny. Tak obliczone wskaźniki dynamiki mają często właściwości prognostyczne (ostrzegawcze, wskaźnik wiodący). Przykładowo, osłabienie dynamiki wzrostów stanowi sygnał, że ceny mogą zmienić kierunek ze wzrostowego na spadkowy. Jest to dobrze widoczne na rysunku 1.2.3, gdzie widzimy, że w kilku momentach wskaźniki dynamiki wcześniej zmieniały kierunek niż oszacowany składnik trendu-cyklu.

**Rysunek 1.2.3. Kształtowanie się cen żywca wieprzowego (zł/kg) wraz z długookresowym trendem (TC) oraz wskaźnikami dynamiki r/r**



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

### Dekompozycja szeregu czasowego

Z praktycznego punktu widzenia podstawową kwestią w analizie szeregów czasowych jest obliczenie poszczególnych składowych, czyli wartości trendu, składnika cyklicznego, wskaźnika wahań sezonowych i wahań przypadkowych. Procedury dekompozycji są szeroko opisane w wielu podręcznikach ze statystyki czy prognozowania. Poniżej pokrótce przedstawione to zostanie dla tych uczestników rynku czy analityków, którzy chcieliby posłużyć się tym prostym narzędziem w celu oceny sytuacji rynków, a później nawet sformułowania prognozy. Ogólne etapy dekompozycji szeregu czasowego do celów analitycznych wiążą się kolejno z:

- obliczeniem średniej ruchomej scentrowanej, która reprezentuje trend-cykl,
- obliczeniem składnika sezonowego i jego eliminacją z szeregu,
- rozdzieleniu trendu-cyklu na trend i wahania cykliczne,
- obliczeniem składnika przypadkowego jako wartości rezydualnej pomiędzy wartościami szeregu czasowego a trendu-cyklu.

Istnieje wiele wariantów dekompozycji. W tym rozdziale przedstawiona zostanie najprostsza z nich. Na jej podstawie dokonana zostanie interpretacja poszczególnych składowych. Stanowi to niejako wprowadzenie do bardziej zaawansowanego podejścia, jakim jest przykładowo metoda korekcji sezonowej X-12-ARIMA przedstawiona w rozdziale 3. Pomocnicze obliczenia zawarto w tabeli 1.2.1.

Zanim przeprowadzone zostaną obliczenia, należy zastanowić się nad rodzajem modelu (powiązaniami między zmiennymi). Korzysta się w tym celu najczęściej z analizy graficznej danych. Z rysunku 1.1 nie wynika jednoznacznie, który model jest właściwszy, niemniej w praktyce w większości przypadków stosuje się modele multiplikatywne. Dlatego też założymy powiązania między zmiennymi w następującej formie  $Y_t = T_t * C_t * S_t * I_t$ . Zakładając takie powiązania między zmiennymi, wszelkie operacje, jakie wykonujemy na szeregu czasowym i jego poszczególnych składowych, sprowadzają się do mnożenia i dzielenia.

W pierwszym kroku oblicza się średnią ruchomą scentrowaną, która reprezentuje trend-cykl. Liczba pełnych obserwacji, z których obliczamy taką średnią wynosi tyle, ile mamy sezonów w roku (w naszym przypadku 12 miesięcy). Wartości obliczonej średniej przyporządkowuje się środkowej obserwacji. W przypadku gdy liczba sezonów jest liczbą parzystą, bierzemy do średniej o jedną obserwację więcej, a ostatniej i pierwszej z nich nadajemy wagę  $\frac{1}{2}$ . Przykładowo trend-cykl w 7 okresie (lipiec 2000) obliczamy jako:

$$\begin{aligned}
 TC_7 &= (0,5 * Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_{12} + 0,5 * Y_{13}) / 12 = \\
 &= (0,5 * 3,17 + 3,10 + 3,23_2 + \dots + 4,05 + 0,5 * 4,04) / 12 = 3,78,
 \end{aligned}$$

gdzie  $Y_1$  oznacza cenę w pierwszym analizowanym miesiącu (styczeń 2000),  $Y_2$  – cenę w drugim miesiącu (luty 2000) itd. Kolejne wyrazy średniej ruchomej obliczamy w analogiczny sposób tylko z innego zakresu danych ( $TC_8$  obliczamy na podstawie danych od obserwacji 2 do 14). Tak obliczona średnia ruchoma jest przedstawiona na rysunkach 1.2.1 i 1.2.3. Widać, że jest ona pozbawiona zarówno wahań sezonowych, jak i losowych.

**Tabela 1.2.1. Przykładowe obliczenia do dekompozycji szeregu czasowego  
(na przykładzie cen żywca wieprzowego (zł/kg))**

Okres	t	Yt=TtCtSt	TCt	Yt/TCt= St	Si	Si	St	Yt/St=TtCt	Tt	Ct	It
sty-00	1	3,17			0,923	0,924	0,924	3,43	3,71		
lut-00	2	3,10			0,920	0,920	0,920	3,37	3,71		
mar-00	3	3,23			0,968	0,969	0,969	3,33	3,71		
kwi-00	4	3,39			0,964	0,964	0,964	3,52	3,72		
maj-00	5	3,54			0,961	0,962	0,962	3,68	3,72		
cze-00	6	3,60			1,021	1,021	1,021	3,52	3,72		
lip-00	7	4,19	3,78	1,11	1,078	1,079	1,079	3,88	3,72	1,02	1,03
sie-00	8	4,28	3,86	1,11	1,103	1,104	1,104	3,88	3,73	1,03	1,01
wrz-00	9	4,32	3,94	1,10	1,097	1,098	1,098	3,93	3,73	1,06	1,00
paź-00	10	4,24	4,03	1,05	1,018	1,019	1,019	4,16	3,73	1,08	1,03
lis-00	11	3,84	4,11	0,94	0,969	0,970	0,970	3,96	3,74	1,10	0,96
gru-00	12	4,05	4,16	0,97	0,970	0,970	0,970	4,17	3,74	1,11	1,00
sty-01	13	4,04	4,20	0,96			0,924	4,37	3,74	1,12	1,04
lut-01	14	4,00	4,23	0,95	suma	suma	0,920	4,35	3,74	1,13	1,03
mar-01	15	4,34	4,26	1,02	11,991	12,000	0,969	4,48	3,75	1,14	1,05
kwi-01	16	4,51	4,30	1,05			0,964	4,68	3,75	1,15	1,09
maj-01	17	4,20	4,35	0,97	Wsp. korekty		0,962	4,37	3,75	1,16	1,00
cze-01	18	4,29	4,40	0,98	0,999		1,021	4,20	3,76	1,17	0,96
lip-01	19	4,43	4,42	1,00			1,079	4,10	3,76	1,18	0,93
sie-01	20	4,63	4,42	1,05			1,104	4,20	3,76	1,17	0,95
wrz-01	21	4,73	4,40	1,08			1,098	4,31	3,76	1,17	0,98
paź-01	22	4,74	4,36	1,09			1,019	4,65	3,77	1,16	1,07
lis-01	23	4,56	4,30	1,06			0,970	4,70	3,77	1,14	1,09
gru-01	24	4,51	4,23	1,07			0,970	4,65	3,77	1,12	1,10
sty-02	25	4,08	4,16	0,98			0,924	4,42	3,78	1,10	1,06
lut-02	26	3,94	4,09	0,96			0,920	4,28	3,78	1,08	1,05
...	...	...	...	...			...	...	...	...	...
...	...	...	...	...			...	...	...	...	...
...	...	...	...	...			...	...	...	...	...
...	...	...	...	...			...	...	...	...	...
sty-10	121	3,72	4,11	0,91			0,924	4,03	4,05	1,01	0,98
lut-10	122	3,62	4,06	0,89			0,920	3,93	4,06	1,00	0,97
mar-10	123	3,72	4,02	0,92			0,969	3,84	4,06	0,99	0,95
kwi-10	124	3,57	3,99	0,89			0,964	3,70	4,06	0,98	0,93
maj-10	125	3,77	3,96	0,95			0,962	3,92	4,07	0,97	0,99
cze-10	126	4,38	3,95	1,11			1,021	4,29	4,07	0,97	1,09
lip-10	127	4,32	3,95	1,09			1,079	4,00	4,07	0,97	1,01
sie-10	128	4,47	3,96	1,13			1,104	4,05	4,07	0,97	1,02
wrz-10	129	4,24	4,00	1,06			1,098	3,86	4,08	0,98	0,97
paź-10	130	3,86	4,05	0,95			1,019	3,79	4,08	0,99	0,93
lis-10	131	3,81	4,12	0,93			0,970	3,93	4,08	1,01	0,95
gru-10	132	3,89					0,970	4,01	4,09		
sty-11	133	3,71					0,924	4,02	4,09		
lut-11	134	3,95					0,920	4,29	4,09		
mar-11	135	4,23					0,969	4,37	4,10		
kwi-11	136	4,47					0,964	4,64	4,10		
maj-11	137	4,41					0,962	4,59	4,10		

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

W celu obliczenia składnika sezonowego, najpierw należy usunąć z danych trend-cykl poprzez operację dzielenia:  $Y_t/TC_t=SI_t$ . W przypadku modelu addytywnego, odejmujemy średnią ruchomą od wartości rzeczywistych szeregu czasowego. Zatem w danych tych znajduje się już wyłącznie sezonowość i wahania przypadkowe.

Obliczenie składnika sezonowego sprowadza się do uśrednienia szeregu SI dla obserwacji z tych samych sezonów. Czyli obliczając wskaźnik sezonowości dla stycznia, robimy to następująco:

$$\hat{S}_{\text{styczeń}} = (SI_{\text{styczeń}2001} + SI_{\text{styczeń}2002} + \dots + SI_{\text{styczeń}2010})/10 = (0,96 + 0,98 + \dots + 0,91)/10 = 0,923.$$

Sprowadza się to do obliczenia sumy kolejnych wartości styczniowych szeregu  $Y_t/TC_t$ , która następnie jest dzielona przez liczbę analizowanych lat. Kolejne wskaźniki obliczamy w analogiczny sposób dla pozostałych jedenastu sezonów (miesiące).

Jeżeli suma wszystkich średnich wskaźników dla poszczególnych miesięcy jest równa liczbie sezonów w roku, to uznajemy je za ostateczne wskaźniki sezonowe. Jeśli nie, to nazywamy je wskaźnikami nieoczyszczonymi (surowymi) i dokonujemy ich korekty, tak aby suma była równa dokładnie liczbie sezonów. W naszym przypadku suma średnich wynosi  $\sum \hat{S}_i = 11,991$ , co jest liczbą dość bliską 12. Stąd można byłoby zaakceptować te wskaźniki jako ostateczne. Jeżeli jednak zależy nam na dokładności, obliczamy wskaźnik korekty, dzieląc sumę wskaźników surowych przez liczbę sezonów w roku  $s$ :  $K_r = \sum \hat{S}_i / s$ . Dla naszego przykładu wskaźnik korekty wynosi  $K_r = \sum \hat{S}_i / 12 = 0,999$ . Ostatecznie oczyszczone wskaźniki sezonowe uzyskujemy poprzez podzielenie wskaźników surowych przez obliczony wcześniej wskaźnik korekty  $S_i = \hat{S}_i / K_r$ . Z uwagi na to, że wskaźnik jest bliski jedności, nie ma większych różnic w otrzymanych wskaźnikach  $S_i$  w stosunku do wskaźników nieoczyszczonych. Natomiast ich suma jest teraz równa 12.

W przypadku modelu addytywnego, suma wskaźników sezonowości powinna wynosić zero. W przypadku gdy różni się od zera, dokonujemy korekty, odejmując od poszczególnych surowych wskaźników sezonowości obliczony współczynnik korekty.

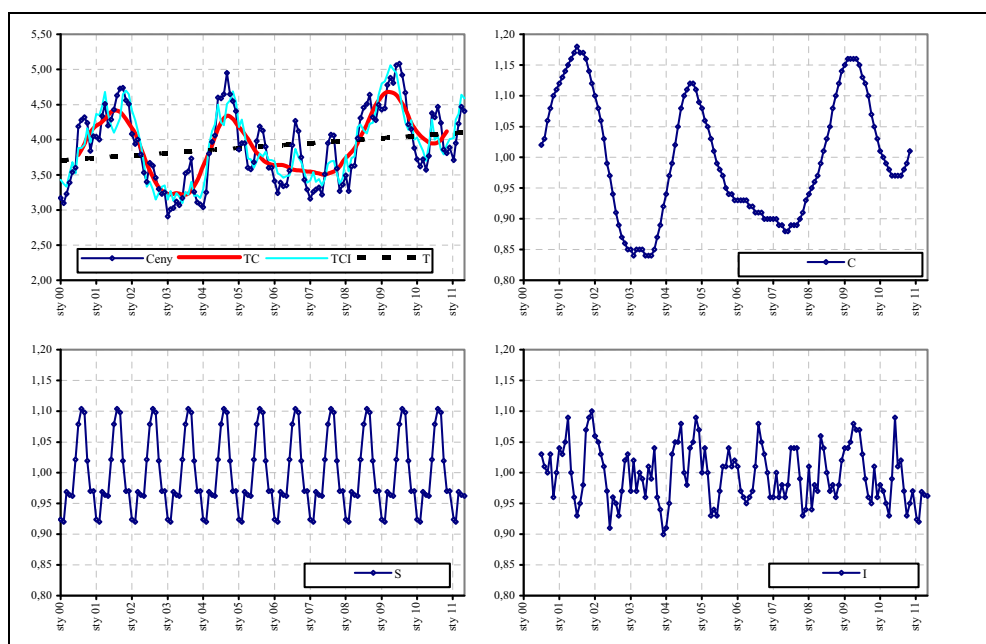
Wskaźniki te reprezentują średnie odchylenia cen wieprzowiny w poszczególnych sezonach od długookresowego trendu w analizowanym okresie. Dlatego też w kolejnej kolumnie ( $S_i$ ) przepisano je w sposób cykliczny dla kolejnych lat. Czyli np. wskaźnik dla stycznia (0,924) pokazuje, co się dzieje w styczniu każdego roku. Wartość 0,924 mówi, że ceny w styczniu stanowią 0,924 poziomu długookresowego trendu (lub 92,4% poziomu TC). Innymi słowy, w styczniu ceny wieprzowiny są przeciętnie niższe o  $(1 - 0,924) * 100\% = 7,6\%$  od poziomu długookresowego trendu. Najwyższe sezonowo ceny są w sierpniu (1,103). Ich poziom jest o 10,3% wyższy od cen wynikających z długookresowego trendu.

Kolejnym krokiem jest eliminacja sezonowości z danych empirycznych. Dokonuje jej się poprzez podzielenie wartości empirycznych przez oczyszczone wskaźniki sezonowości  $Y_t/S_t$ . Przykładowo dla stycznia 2000 roku liczymy je następująco:  $Y_1/S_1 = 3,17/0,924 = 3,43$ . Tak otrzymany szereg (skorygowany sezonowo) przedstawiono na rysunku 1.2.4. W przypadku modelu addytywnego odejmujemy od danych empirycznych efekty sezonowe.



Następnie możemy dokonać rozdzielenia trendu od cyklu. Jest to etap budzący najwięcej wątpliwości co do jego zasadności. Wymaga to obliczenia tendencji rozwojowej. W tym celu stosujemy analityczne funkcje trendu. Z reguły stosuje się proste (liniowe lub wykładnicze postaci trendu). Trend można dopasować za pomocą opcji „dodaj linię trendu” w Excelu. Otrzymane w taki sposób równanie trendu liniowego po zaokrągleniu do czterech miejsc po przecinku wygląda następująco:  $y = 0,0029x + 3,7369$ . Po podstawieniu w miejsce  $x$  zmiennej czasowej równanie zapisujemy jako  $T_t = 0,0029 \cdot t + 3,7369$ . Z niego też obliczymy poszczególne wartości trendu, przykładowo wartość trendu w maju 2001 (siedemnasta obserwacja w naszym szeregu czasowym,  $t = 17$ ) wynosi  $T_{17} = 0,0029 \cdot 17 + 3,7369 = 3,75$ .

**Rysunek 1.2.4. Dekompozycja szeregu czasowego cen żywca wieprzowego (zł/kg) na trend (T), wahania cykliczne (C), sezonowe (S) i przypadkowe (I)**



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Wahania cykliczne obliczymy poprzez podzielenie trendu-cyklu przez wartości tendencji rozwojowej:  $C_t = TC_t / T_t$ . Przykładowo w maju 2001 roku oszacowana wartość cyklu wynosi:  $C_{17} = TC_{17} / T_{17} = 4,35 / 3,75 = 1,16$ . Interpretacja wskaźników cyklicznych jest podobna jest do interpretacji wskaźników sezonowych.

Ostatni element, czyli składnik przypadkowy  $I_t$  obliczany jest jako wartość rezydualna. Można skorzystać np. ze wzoru  $I_t = Y_t/TC_t/S_t$ . W modelu addytywnym wahania przypadkowe obliczamy ze wzoru:  $I_t = Y_t - TC_t - S_t$ .

Wadą zaprezentowanego podejścia jest skracanie danych na początku i na końcu z uwagi na stosowanie średnich ruchomych. Istnieją sposoby porażenia sobie z tym problemem, jednak ich zastosowanie wpłynęłoby negatywnie na przejrzystość przykładu stanowiącego podstawę dla zrozumienia idei dekompozycji szeregu czasowego.

Efekt końcowy powyższych działań jest widoczny na rysunku 1.2.4. Szereg czasowy cen został rozłożony na trend, wahania cykliczne, sezonowe i przypadkowe. Widzimy, że największy wpływ na kształtowanie cen mają wahania cykliczne, których amplituda przekracza 30 p.p. Mniejsze znaczenia mają wahania sezonowe (amplituda wynosi niecałe 20 p.p.). Wahania przypadkowe mają podobny udział w całkowitej zmienności jak wahania sezonowe. Prawidłowości określone wyżej mogą zostać wykorzystane przez analityka, który korzysta również z innych informacji, do budowy prognoz. Mogą być również podstawą budowy prognozy na podstawie tzw. metody wskaźników [Cieślak 2005].

### 1.3. Ekstrapolacja prawidłowości

Pytania o możliwości przewidywania przyszłości pojawiały się od zawsze. Jest to pytanie stawiane nie tylko na gruncie ekonomicznym, statystycznym czy ekonometrycznym, ale i na gruncie filozoficznym. Jeżeli miliony chciwych, samolubnych jednostek w dążeniu do własnych celów i przeważnie niekontrolowanych przez państwo w swych dążeniach nie prowadzą do anarchii, jak to określił Adam Smith, to najprawdopodobniej możliwe jest również przewidywanie zachowań uczestników rynku. Pytanie tylko, w jakim stopniu możemy przewidywać przyszłość.

Podstawą prognozowania jest zastosowanie pewnych metod prognostycznych. Na podejście prognostyczne składają się dwie fazy: faza diagnozowania przeszłości i faza określania przyszłości [Cieślak 2005]. Związane są one odpowiednio z modelowaniem i ekstrapolacją prawidłowości.

Faza pierwsza związana jest z poszukiwaniem prawidłowości w przeszłości i próbą ich odzwierciedlenia za pomocą modelu. Model stanowi uproszczony opis rzeczywistości. Wedle definicji jest to „schematyczne uproszczenie, pomijające nieistotne aspekty w celu wyjaśnienia wewnętrznego działania, formy lub konstrukcji bardziej skomplikowanego mechanizmu” [Klein 1982, s. 15]. Modele oparte są na związkach zmiennej prognozowanej z innymi zmiennymi, które

pełnią rolę zmiennych objaśniających, lub na związkach w ramach danego szeregu czasowego.

Ponieważ niniejsze opracowanie poświęcone jest modelom prognozowania opartym na szeregach czasowych, ograniczymy się tylko do związków o charakterze dynamicznym w ramach pojedynczego szeregu czasowego. Przykład prawidłowości, w oparciu o które buduje się modele podano w rozdziale 1.2. Ujęcie, w którym rozróżniamy trend, wahania cykliczne, sezonowe i przypadkowe, jest jedną z propozycji, która ułatwia zrozumienie istoty modelowania szeregów czasowych. W większości jednak przypadków prawidłowości występujące w szeregu czasowym są ukryte w postaci „czarnej skrzynki” różnych zależności, jak to wskazują Box i Jenkins [1983]. Zakłada się tym samym interakcje między składowymi, które modyfikują się nawzajem. Zatem modelowe ujęcie szeregu czasowego zakłada mniej lub bardziej czytelne (bezpośrednie) ułożenie prawidłowości dla okresów historycznych.

Poznanie prawidłowości i budowa modelu są ważne, aczkolwiek nie przesądzają definitywnie o jakości formułowanych na ich podstawie prognoz. Wszystko zależy od tego, jakimi zasadami będziemy kierowali się określając przyszłość w oparciu o poznane zależności. Zasada (reguła) prognozowania pozwala przenieść prawidłowości ujęte w modelu do przeszłości.

Najczęściej stosowaną regułą jest reguła podstawowa. Jej stosowanie jest racjonalne wówczas, gdy istnieje uzasadnione podejrzenie, że model oszacowany w oparciu o przeszłe informacje nie zostanie zdezaktualizowany w przyszłości. Regułą taką stosujemy w przypadku zjawisk charakteryzujących się znaczną inercją. Zastosowanie tej reguły w praktyce wiąże się z ekstrapolacją opisanych w modelu prawidłowości poza próbę (w przyszłość). Wiąże się to z dwiema zaletami: statystyczną – daje prognozy nieobciążone oraz praktyczną – jest łatwa do wyznaczenia. Powyższą zasadę stosuje się wówczas, gdy proces jest powtarzalny i nie występują błędy systematyczne. W długim ciągu prognoz błędy dodatnie i ujemne równoważą się, co oznacza, że proces predykcji nie zawyża ani nie zaniża ocen przyszłej realizacji zmiennej prognozowanej. W tych warunkach należy oczekiwać, że średni błąd ciągu tak otrzymanych prognoz będzie bliski zeru.

Z zasadą podstawową wiąże się przyjęcie tzw. postaci pasywnej wobec przyszłości [Dittmann 2008]. Prognoza nie ingeruje w prognozy wyznaczone za pomocą modelu ilościowego. Zakłada jedynie, że np. wzorzec sezonowości nie ulegnie zmianom czy trend będzie kontynuowany w dotychczasowym tempie. Dla krótkich okresów w zdecydowanej większości przypadków takie podejście jest wystarczające.

Pytanie brzmi, kiedy nie jest możliwe stosowanie postawy pasywnej, a wymagana jest aktywna postawa wobec przyszłości. Niewątpliwie dzieje się tak wtedy, gdy nie można uznać oszacowanego modelu za w pełni aktualnego dla okresów przyszłych. Może to nastąpić na przykład wówczas, gdy zostaną wprowadzone nowe regulacje podatkowe czy rynkowe (interwencjonizm), powodując wzrost cen (lub spadek) prognozowanego produktu. W takim przypadku skorzystanie z reguły podstawowej prowadzioby do obciążenia prognoz, czyli do przyjęcia za prognozę wartości systematycznie zawyżonych lub zaniżonych. Stosuje się wówczas tzw. regułę podstawową z poprawką [Czerwiński, Guzik 1980]. Polega ona na przyjęciu za wartość prognozowaną nie prognozy wyznaczonej bezpośrednio z modelu ilościowego, ale prognozy skorygowanej o pewną wartość – poprawkę. Poprawka może mieć charakter formalny bądź wynikać z czystej ingerencji prognosty i jego pozastatystycznej wiedzy. Z tym łączy się integracja metod ilościowych i jakościowych w procesie prognozowania.

Na dezaktualizację modelu, obok wiedzy merytorycznej, mogą wskazywać nietypowe zachowania w szeregu czasowym. Najważniejsze z nich to zdarzenia:

- jednorazowe (*additive outliers* – AO), tj. stanowiące istotne odchylenie od przewidywanej wartości badanego zjawiska tylko w jednym okresie, nie wpływające na wartości szeregu w następnych okresach,
- długotrwałe (*level shift* – LS), tj. powodujące trwałą zmianę poziomu zmiennej,
- powodujące przejściową zmianę poziomu zmiennej (*temporary change* – TC), przy czym powrót do stanu początkowego następuje przeważnie zgodnie z funkcją wykładniczą lub liniową,
- innowacyjne (*innovation outliers* – IO), które, w przeciwieństwie do wyżej omawianych, powodują zmianę procesu generującego dane, w szczególności zmianę postaci trendu. Zdarzeniem o charakterze innowacyjnym może być np. zastosowanie nowej technologii produkcji.

W zależności od tego, jak zakwalifikujemy taką zmianę struktury szeregu czasowego, w różny sposób podchodzimy do modelowania i prognozowania. Szczególnie dotyczy to przypadków, gdy takie zmiany pojawiają się w ostatnich okresach (na końcu szeregu czasowego). Należy przeanalizować, dlaczego występują oraz czy mają charakter trwały, czy też chwilowy. Dopiero potem można określić sposób „poprawienia” prognozy. Jeżeli będzie to trwała zmiana, wówczas poprawkę można oszacować jako wartość średnią z kilku ostatnich odchyleń, a następnie dodać ją do wartości prognoz wynikających z zastosowania reguły podstawowej. Inne postępowanie stosowane jest wówczas, gdy mamy do

czynienia z odchyleniami w ostatnich okresach, ale przypuszczamy, że nie są związane z czynnikami, które utrzymają się w przyszłości. Można wówczas oszacować inny sposób dochodzenia wartości rzeczywistych do prognoz uzyskanych z modelu podstawowego.

Przy krótkookresowym prognozowaniu, a także gdy istnieją podstawy do przypuszczenia, że zmienna prognozowana ulega nieregularnym zmianom w czasie, przydatne są tzw. modele adaptacyjne. Cechą charakterystyczną modeli należących do tej grupy jest to, że nie zakłada się dla nich stałej postaci analitycznej mechanizmu przedstawiającego kształtowanie się zmiennej (np. cen surowców), lecz dopuszcza się zmiany w nieregularnych odstępach. Modele adaptacyjne są konstruowane w ten sposób, by rozluźnić założenia klasycznej teorii predykcji, uwzględniając między innymi niestałość struktury ekonomicznej i możliwość zmian parametrów w czasie. Duża elastyczność modeli adaptacyjnych i ich zdolność dostosowawcza trendu czy wahań sezonowych czynią z nich przydatne narzędzie prognoz krótkookresowych [Zeliaś 1997].

Ponieważ mamy do czynienia dostosowywaniem się modelu do danych, prognoza zawsze jest średnią ważoną przeszłych danych (i przeszłych błędów). W zależności od stabilności struktury szeregu czasowego wagi te w różny sposób się rozkładają: im bardziej nieregularne zjawisko, tym prognoza jest w większym stopniu pochodną najnowszych informacji. Dzięki temu nawet po załamaniu się dotychczasowych prawidłowości ekonomicznych model szybko dostosowuje się do nowych warunków. Do czynników przemawiających za ich stosowaniem należy też względna prostota obliczeń oraz niższe formalno-statystyczne wymagania.

Niestety wadą powyższych modeli jest brak powrotu modelu do pewnego poziomu długookresowej równowagi. Istnieje wówczas ryzyko popełnienia dużych błędów, jeżeli prognozujemy na podstawie modeli adaptacyjnych w okolicach momentów zwrotnych. Przykładowo, prognozując ceny żywca wieprzowego w czerwcu 2009 roku (por. rysunek 4.1.1) na podstawie modelu adaptacyjnego (model Wintersa byłby rekomendowany) prognoza na 12 miesięcy naprzód przekroczyłaby zapewne poziom 5,50 zł/kg. Dlatego prognozy wykonywane na więcej niż 3 okresy mogą charakteryzować się bardzo dużymi błędami.

Zatem z prognostycznego punktu widzenia najlepiej byłoby, aby modele z jednej strony dostosowywały się do nowych informacji, ale jednocześnie zakładały z czasem powrót do długookresowego trendu (do regresji). Trudno sobie bowiem wyobrazić bezustanny wzrost cen surowców rolnych, bez żadnych korekt, bez reakcji producentów czy konsumentów na zmiany cen. Ten postulat wydają się spełniać modele autoregresji, których podstawową cechą jest zwią-

zek funkcyjny między wartościami zmiennej w czasie  $t$  a wartościami tej samej zmiennej w okresach poprzednich ( $t-1$ ,  $t-2$ , ...). Stanowią one podstawę dla wielu modeli przedstawionych w rozdziale 2 i 3, takich jak ARMA (autoregresji i średniej ruchomej), ARIMA (zintegrowane modele autoregresji i średniej ruchomej) czy SARIMA (zintegrowane sezonowe modele autoregresji i średniej ruchomej).

## 1.4. Metody prognozowania na podstawie szeregów czasowych

W praktyce do celów krótkookresowego prognozowania cen spośród metod ilościowych wykorzystuje się głównie metody prognozowania oparte na szeregach czasowych. Popularność ta jest wynikiem kilku właściwości, na których opierają się te metody.

Po pierwsze, z założenia jedynym i wystarczającym źródłem informacji o przyszłym przebiegu zjawiska jest szereg czasowy zmiennej prognozowanej i jego przekształcenia. Ma to głębokie uzasadnienie w ogólnym stwierdzeniu mówiącym, że „w cenie zawarte są wszystkie dostępne informacje”. Tym samym nie ma konieczności zbierania i analizowania niezliczonej ilości informacji z różnych źródeł.

Po drugie, prognoza jest sądem warunkowym tzn. istnieje duże prawdopodobieństwo, że wartości rzeczywiste będą bliskie prognozowanym, jeżeli zmienne objaśniające w okresie tym będą zachowywały się zgodnie z naszymi założeniami. W przypadku modeli szeregów czasowych nie musimy w ogóle przyjmować założeń co do wartości zmiennych objaśniających. Są one albo dane (np. czas), albo opieramy się na przeszłych obserwacjach.

Po trzecie, jak pokazuje doświadczenie, prognozy takie nie są gorsze od prognoz uzyskiwanych w oparciu o bardziej skomplikowane modele. W wielu przypadkach wystarczająca jest odpowiedź na pytanie, jak się stanie, a nie dlaczego tak się stanie.

Poniżej przedstawimy kilka możliwych podejść, w których prognoza budowana jest na podstawie tylko i wyłącznie historycznych informacji. Formułowane prognozy mogą mieć zarówno charakter ilościowy, jak i jakościowy. Istotne jest wskazanie metod, które umożliwiają formułowanie krótkookresowych prognoz, na podstawie których uczestnicy rynku (producenci, przetwórcy czy handlowcy) będą mogli podejmować decyzje produkcyjne i operacyjne (kiedy kupić, kiedy sprzedać).

Podstawą dla wyboru metod jest zawsze identyfikacja prawidłowości (elementów składowych szeregu czasowego) poprzez ocenę merytoryczną, gra-

ficzną czy statystyczną. Pomiar tych prawidłowości nie jest konieczny do wyznaczenia prognozy, ale pozwala lepiej zrozumieć zjawisko i w efekcie końcowym dokonać merytorycznej oceny modelu czy realności obliczonych prognoz. Doświadczenie autorów jak i wiele badań wskazują, że szeregi czasowe cen surowców rolnych charakteryzują się złożoną strukturą i zawierają wszystkie przedstawione wcześniej składowe, tj. trend, wahania cykliczne, sezonowe i przypadkowe. Zatem metody powinny pozwolić takie prawidłowości uchwycić oraz umożliwić ich ekstrapolację poza próbę poprzez zastosowanie bardziej lub mniej formalnego podejścia.

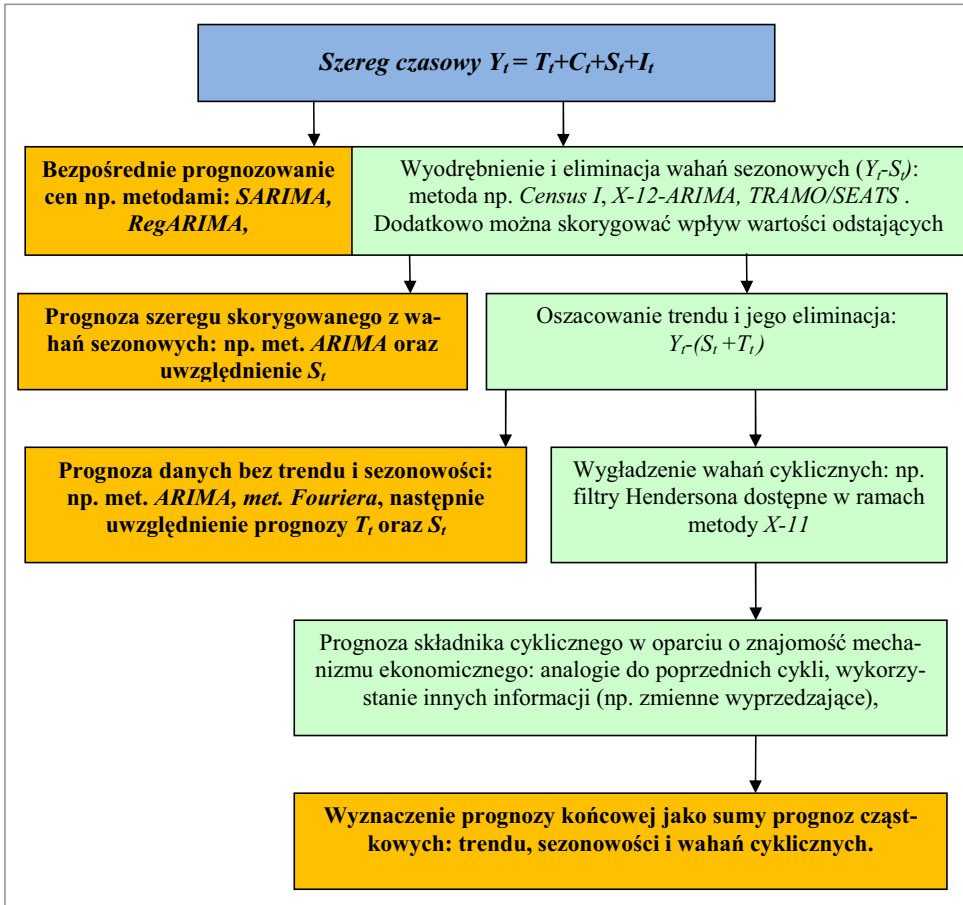
Mając na względzie cel opracowania, przedstawiono w nim zarówno proste, jak i bardziej skomplikowane podejścia do prognozowania na podstawie szeregów czasowych. Z tego ujęcia będą mogli skorzystać zarówno osoby posiadające relatywnie niewielką wiedzę z zakresu statystyki i ekonometrii, jak również analitycy dysponujący szerszą wiedzą w tym zakresie.

Sposoby uzyskania prognoz na podstawie szeregu czasowego zaprezentowano na rysunku 1.4.1. Podejście to charakteryzuje się dużym stopniem swobody w zależności od wiedzy prognosty, jak i struktury szeregu czasowego. Pozwala na zastosowanie również innych modeli niż sugerowane tutaj. Niemniej jednak należy pamiętać, że dobór metody powinien uwzględniać strukturę szeregu czasowego, tj. prawidłowości w nim występujące.

Najczęściej prognozy są obliczane bezpośrednio na podstawie szeregów czasowych (danych wejściowych). Dane takie mogą podlegać pewnym przekształceniom (logarytmowanie, różnicowanie) jednak takie modyfikacje wchodzi w zakres stosowanej metody. Do prognozowania można stosować szeroką gamę metod i modeli. Najbardziej ogólnym podejściem do prognozowania szeregów czasowych jest zastosowanie zintegrowanych modeli autoregresji i średnich ruchomych (ARIMA) [Box, Jenkins 1983]. Omówiono je szerzej w kolejnym rozdziale. Proponujemy je, ponieważ stanowią bardzo szeroką klasę modeli i często inne modele stanowią pewien przypadek modelu ARIMA. Modele ARIMA zostały przedstawione kilkadziesiąt lat temu, a pełne możliwości ich wykorzystania pojawiły się wraz z rozwojem technik komputerowych.

Modele ARIMA mogą być rozszerzone o dodatkowe zmienne, za pomocą których możemy uwzględnić pewne specyficzne charakterystyki szeregów czasowych lub wpływ innych zmiennych. W naszych badaniach nie braliśmy pod uwagę wpływu zmiennych innych niż zmienna prognozowana i ograniczyliśmy się do uwzględniania jedynie obserwacji odstających, efektu „świąt ruchomych”, liczby dni roboczych czy sezonowości. Modele te nazywamy modelami RegARIMA lub ARIMAX.

Rysunek 1.4.1. Schemat prognozowania cen surowców rolnych na podstawie szeregów czasowych



Źródło: opracowano na podstawie [Hamulczuk, Stańko 2009].

Z drugiej strony prognoza może być wyliczana w drodze procedury wielostopniowej, co nosi nazwę metody wskaźników lub dekompozycji. Dekompozycja szeregu czasowego i prognozowanie w oparciu o wyodrębnione elementy jest jedną z procedur prognozowania zjawisk charakteryzujących się periodycznymi zmianami. Mimo że nie zawsze spełnia wymagania z punktu widzenia teorii statystyki i predykcji, to znajduje zastosowanie w praktyce gospodarczej. Musimy jednak pamiętać, że praktyka prognozowania cen opiera się na prostych metodach ilościowych i przede wszystkim na podstawie metod jakościowych (opinie, ekspertyzy indywidualne i zespołowe). Niniejsze opracowanie ma na celu pokazanie również innych sposobów.



W ramach metody wskaźników można wykorzystać wiele metod, których celem jest oszacowanie wskaźników sezonowych, wyodrębnienie trendu czy wahań cyklicznych. Niekoniecznie procedura dekompozycji musi być pełna, tak jak to zaprezentowano w podrozdziale 1.2.

W ramach dekompozycji można ograniczyć się do wyodrębnienia i eliminacji wahań sezonowych. Następnie należy uzyskać prognozę szeregu czasowego bez wahań sezonowych. Do oszacowania składnika sezonowego można zastosować prosty sposób przedstawiony w podrozdziale 1.2 lub wielostopniowe metody korekcji sezonowej X-12-ARIMA czy TRAMO/SEAT [Grudkowska, Paśnicka 2007]. Ich wykorzystanie wynika z konieczności uwzględnienia zmiennego typu sezonowości oraz korekty ze względu na obserwacje odstające. Udoskonalane sposoby oszacowania i eliminacji składnika sezonowego sprawiły, że postępowanie oparte na takim sposobie eliminacji sezonowości stało się standardem w wielu krajowych urzędach statystycznych. Należy jednak pamiętać, że wyniki uzyskiwane przy szacowaniu zależą od długości przyjętych średnich ruchomych oraz stosowanych korekt ze względu na wartości odstające.

Do prognozowania szeregu skorygowanego sezonowo wykorzystuje się najczęściej modele ARIMA [Box, Jenkins 1983]. Ostateczna prognoza będzie równa prognozie cząstkowej szeregu skorygowanego sezonowo plus składnik sezonowy. Wartości składnika sezonowego dla okresów przyszłych można ekstrapolować lub pozostawić na poziomie ostatniego roku (wahania sezonowe są zmienne, ale zmiany te w krótkim okresie są niewielkie). Składnika przypadkowego nie uwzględnia się, o ile ma on charakter losowy.

Desezonalizację możemy dodatkowo rozszerzyć o wyodrębnienie trendu za pomocą np. liniowej lub wykładniczej linii trendu. Jest zasadne wówczas, gdy zjawisko podlega deterministycznemu trendowi w długim okresie od którego (jako poziomu pewnej równowagi) następują pewne odchylenia w górę i w dół. Rozdzielanie trendu od wahań cyklicznych budzi najwięcej kontrowersji wśród statystyków z uwagi na to, że są to elementy silnie powiązane i w zależności od ilości posiadanych danych uzyskuje się znacząco różne oszacowania trendu. W praktyce gospodarczej występują bowiem cykle o różnej długości, pozostając wobec siebie w określonej relacji. Krzywa cyklu dłuższego jest trendem cyklu krótszego (niższego rzędu). Generalnie najczęściej proponuje się (z uwagi na możliwość późniejszej ekstrapolacji poza próbę) w miarę prosty trend analityczny (liniowy, wykładniczy).

Otrzymuje się wówczas szereg skorygowany z wahań sezonowych i trendu. Najczęściej zawiera on wahania cykliczne i przypadkowe. Często jest to już szereg stacjonarny, do prognozowania którego możemy zastosować np. model

autoregresji czy model ARMA. Oczywiście możliwości jest tutaj znacznie więcej, ale my skupiamy się na modelach, które opisujemy w dalszej części opracowania i które stały się pewnym standardem prognostycznym. Aby obliczyć ostateczną prognozę należałoby: dokonać ekstrapolacji trendu, uwzględnić wahania sezonowe oraz prognozę cząstkową szeregu czasowego powstałego po eliminacji trendu i sezonowości.

Pełna dekompozycja szeregu czasowego wiązałaby się z wyodrębnieniem wszystkich elementów. Jej idea została opisana w podrozdziale 1.2. Przy czym jeżeli celem dekompozycji jest późniejsze prognozowanie szeregu czasowego, to należałoby zmienić sposób szacowania wahań cyklicznych. W stosowanym tam podejściu wahania cykliczne są skrócone o pół roku na początku i na końcu szeregu czasowego. Zamiast opierania się na prostych średnich ruchomych, można wykorzystać inne filtry, np. filtry Hendersona stanowiące element metody X-11 (obliczenie ich ma charakter automatyczny przy korzystaniu np. z oprogramowania DEMETRA czy Gretl). Długość filtra wygładzania możemy przyjąć na takim poziomie, aby składnik przypadkowy charakteryzował się losowymi właściwościami.

Prognozowanie w tym przypadku jest najmniej formalnym ujęciem i daje możliwości analitykom wykorzystania swojej wiedzy. Ostateczna prognoza stanowi wówczas sumę prognoz cząstkowych: ekstrapolacji trendu oraz uwzględnienia wahań sezonowych i cyklicznych dla prognozowanego okresu.

W tym przypadku prognoza składnika cyklicznego ma najczęściej nieformalny charakter. Podstawą takiej prognozy jest znajomość mechanizmu rozwojowego leżącego u podstaw tzw. cykli towarowych (specjalnych). Można powiedzieć, że szacunek (prognozę) wahań cyklicznych na okresy przyszłe opieramy na wielu czynnikach jednocześnie: analogiach co do kształtu poprzednich cykli, w oparciu o ewentualne kształtowanie się zmiennych wyprzedzających, których zmiany wcześniej mogą informować nas o tym, co się może wydarzyć w przyszłości, na podstawie informacji rynkowej z różnych źródeł. Istotną rolę odgrywa tutaj prognosta dokonujący selekcji czynników i oceniający ich ważność.



## 2. Metodologia ARIMA

W niniejszym opracowaniu posługujemy się nazwą ogólną ARIMA, która stanowi skrót od modeli znanych jako zintegrowane modele autoregresji i średniej ruchomej (Integrated AutoRegressive and Moving Average models). W ramach tej nazwy będziemy rozpatrywali zarówno modele danych stacjonarnych, jak i niestacjonarnych, modele niesezonowe, jak i sezonowe. W literaturze możemy je spotkać również pod nazwą modeli Boxa-Jenkinsa, od nazwisk pomysłodawców takiego ujęcia zjawisk: George'a Boxa i Gwilyma Jenkinsa [1983].

Metodyka postępowania obejmuje identyfikację modelu, estymację parametrów i ocenę modelu oraz prognozowanie. Jeżeli w fazie oceny modelu okaże się, że nie spełnia on wymaganych warunków (istotność parametrów, właściwy rozkład składnika losowego), wówczas należy powrócić do punktu początkowego i na nowo określić parametry modelu. Pomimo zalet modeli ARIMA, końcowy wynik zależy od automatyzacji procedury, wstępnych założeń a priori oraz od doświadczenia prognosty. Stąd też różne osoby, wykonując prognozę dla tego samego zjawiska, mogą wybrać różne modele i otrzymać różne prognozy (choć często prognozy dla konkurencyjnych modeli są zbliżone).

Jedną z wad tych modeli jest wymagana minimalna długość szeregów czasowych niezbędna do prawidłowego oszacowania parametrów. Box i Jenkins [1983] zalecają, żeby szereg czasowy zawierał co najmniej 50 obserwacji dla modeli niesezonowych, a dla sezonowych znacznie więcej. Przykładowo w Tramo/Seats oraz X-12-ARIMA zaleca się, aby szereg czasowy zawierał co najmniej siedem lat [ESS Guideline... 2009]. Jest możliwe prognozowanie również na podstawie krótszych szeregów czasowych, jednakże im mniejsza liczba obserwacji, tym zmniejsza się pewność oszacowania prawidłowych parametrów.

### 2.1. Modele ARIMA

Modele klasy ARIMA są stosowane do prognozowania różnych zjawisk: zarówno charakteryzujących się stałym poziomem (stacjonarnych), tendencją rozwojową, wahaniami cyklicznymi oraz wahaniami sezonowymi. Modele te mają duże możliwości ujmowania różnych aspektów dynamiki zjawisk gospodarczych, co powoduje, że stanowią dobrą narzędną budowy krótkookresowych prognoz wielu zjawisk. Wiele z istniejących modeli prognostycznych można przedstawić w notacji ARIMA.

### 2.1.1. Procesy stacjonarnych szeregów czasowych

Modele ARIMA należą do metod prognozowania szeregów czasowych. Szereg czasowy jest zbiorem zmiennych losowych ( $Y_t$ ). Tak uporządkowane zmienne losowe nazywamy procesem stochastycznym  $\{Y_t\}$ .

Podstawowe modele autoregresji i średniej ruchomej opisują tzw. szeregi (procesy) stacjonarne. Procesy mogą być stacjonarne w węższym lub szerszym sensie. Proces stochastyczny jest stacjonarny w szerszym sensie, jeżeli wielowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa (łącznie i warunkowe rozkłady prawdopodobieństwa) nie zmienia się w czasie.

Dla celów praktycznych wygodniej jest posługiwać się definicją stacjonarności w węższym sensie. Proces stochastyczny jest słabo stacjonarny, jeżeli spełnia równocześnie trzy następujące warunki [Box, Jenkins 1983]:

- Wartość oczekiwana (średnia) jest stała w czasie:  $E(Y_t) = const$ ,
- Wariancja jest stała w czasie:  $Var(Y_t) = const$ ,
- Kowariancja nie ulega zmianom w czasie:  $Cov(Y_t, Y_{t-i}) = \sigma_i$ .

Innymi słowy, procesy stacjonarne charakteryzują się tym, że mają stałą wariancję, a ich wartości w poszczególnych momentach kształtują się wokół względnie stałego poziomu (średniej). Z kolei wartość kowariancji nie zależy od czasu, lecz wyłącznie od odstępów pomiędzy dwoma momentami obserwacji.

Szczególnym rodzajem procesu stacjonarnego jest proces białego szumu. W jego przypadku średnia procesu jest równa zero, wariancja jest stała w czasie, natomiast kowariancja między obserwacjami z okresu  $t$  oraz  $t-i$  jest równa zero. Jest to jednoznaczne z brakiem istotnych zależności autokorelacyjnych. Takimi własnościami powinny charakteryzować się reszty modeli klasy ARIMA, które są oznaczane jako  $e_t$ .

Do opisu stacjonarnych szeregów czasowych praktyczne zastosowanie znajdują:

- modele autoregresji (AR),
- modele średniej ruchomej (MA),
- mieszane modele autoregresji i średniej ruchomej (ARMA).

#### Model autoregresji

W wielu przypadkach opis badanej rzeczywistości możliwy jest dzięki założeniu, że bieżąca wartość zmiennej zależy od jej przeszłych realizacji. Taki opis zjawiska można przedstawić w postaci liniowego modelu autoregresji (AR – *autoregressive model*):

$$\text{AR: } Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

gdzie:

$Y_{t-1}, Y_{t-2} \dots Y_{t-p}$  – wartość zmiennej prognozowanej odpowiednio w okresie  $t-1, t-2, \dots, t-p$ ,

$p$  – rząd autoregresji oznaczający maksymalne opóźnienie zmiennej objaśnianej,

$\phi_0 \phi_1 \dots \phi_p$  – parametry modelu autoregresyjnego,

$\varepsilon_t$  – błędy modelu, tzw. biały szum.

Model dany wzorem (2.1) możemy zapisać również stosując inne formy. Na przykład możemy zapis skrócić do następującej postaci:

$$Y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (2.2)$$

Inną, często stosowaną w praktyce możliwością jest posługiwanie się we wzorach operatorami przesunięcia wstecz ( $B$  – *backshift operator, lag operator*). Przykładowo zamiast używać  $Y_{t-1}$  piszemy  $BY_t$ . Z kolei zamiast  $Y_{t-2}$  używamy oznaczenia  $B^2Y_t$ , gdyż  $BBY_t = B^2Y_t$ . Zatem operator  $B$  podniesiony do potęgi  $i$  przesuwa subskrypt  $t$  o  $i$  okresów wstecz:

$$B^i Y_t = Y_{t-i}. \quad (2.3)$$

Stąd przykładowo model AR rzędu  $p$  można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \\ &= \phi_0 + \phi_1 B Y_t + \phi_2 B^2 Y_t + \dots + \phi_p B^p Y_t + \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Przenosząc na lewą stronę równania  $Y_t$  i stosując oznaczenie  $\phi(B)$  dla wielomianu opóźnień dla części autoregresyjnej:  $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_p Y_{t-p} &= \phi_0 + \varepsilon_t \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Y_t &= \phi_0 + \varepsilon_t \\ \phi(B) Y_t &= \phi_0 + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.5)$$

### Model średniej ruchomej

Proces średniej ruchomej ( $MA$  – *moving average*) jest uzyskiwany według następującego modelu:

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2.6)$$

gdzie:

$q$  – rząd średniej ruchomej oznaczający maksymalne jej opóźnienie,

$\theta_0, \theta_1 \dots \theta_q$  – parametry modelu średniej ruchomej,

pozostałe oznaczenia jak wyżej.

Równie 2.6 można zapisać w postaci syntetycznej:

$$Y_t = \theta_0 + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (2.7)$$

Aby zastosować operatory przesunięcia, wstecz model MA(q) możemy przekształcić analogicznie jak to miało miejsce w przypadku modelu AR(p), stosując do tego wielomian opóźnienia dla średniej ruchomej  $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$ . Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Y_t &= \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ &= \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1 B \varepsilon_t + \theta_2 B^2 \varepsilon_t + \dots + \theta_q B^q \varepsilon_t \\ &= \theta_0 + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) \varepsilon_t \\ &= \theta_0 + \theta(B) \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (2.8)$$

### Modele autoregresji i średniej ruchomej

W modelach ARMA(p,q) wartość zmiennej prognozowanej w okresie  $t$  zależy może od jej przeszłych wartości oraz różnicy między przeszłymi wartościami rzeczywistymi zmiennej prognozowanej a jej wartościami uzyskanymi z modelu (błędów prognoz). Innymi słowy, stanowi to połączenie modelu AR(p) z modelem MA(q). Zapis modelu dla szeregu czasowego stacjonarnego jest następujący [Box, Jenkins 1983]:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + \dots + \theta_q e_{t-q}, \quad (2.9)$$

gdzie: oznaczenia jak wyżej.

Inne zapisy modelu ARMA(p,q) są następujące:

$$Y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + e_t + \sum_{i=1}^q \theta_i e_{t-i}, \quad (2.10)$$

$$\phi(B) Y_t = \phi_0 + \theta(B) e_t. \quad (2.11)$$

Uzależnienie bieżącego poziomu zjawiska od przeszłych obserwacji oraz przeszłych błędów prognoz zmniejsza liczbę wykorzystywanych parametrów w porównaniu do czystych modeli autoregresyjnych. Stąd bezsprzeczną zaletą modeli ARMA(p,q) jest oszczędność parametrów.

### 2.1.2. Procesy niestacjonarnych i sezonowych szeregów czasowych

W modelach ARMA(p,q) zakłada się stacjonarność szeregu zmiennej prognozowanej. W przypadku jej braku, należy doprowadzić szereg czasowy do stacjonarności. W najprostszym ujęciu uzyskanie stacjonarnego szeregu wiązałoby się z eliminacją trendu deterministycznego (poprzez odjęcie od danych wartości oszacowanych na podstawie dopasowanej do danych linii trendu). Postępowanie takie jest zasadne wówczas, gdy wahania wokół takiej linii mają charakter stacjonarny. Takie szeregi określa się mianem trendostacjonarnych. Mówimy, że taki szereg czasowy jest niestacjonarny w zakresie średniej [Gruszczyński i inni 2009].

Nie zawsze jednak szereg czasowy ma taki charakter. W wielu przypadkach szeregi czasowe są przyrostostacjonarne, z czym wiąże się uznanie szeregów za niestacjonarne w zakresie ich wariancji. Oznacza to, że właściwym sposobem eliminacji trendu (doprowadzenia do stacjonarności) jest poddanie szeregu czasowego różnicowaniu. Polega to na d-krotnym obliczaniu różnic sąsiednich wyrazów szeregu aż do momentu osiągnięcia stacjonarności. Do zapisu takiej operacji wykorzystujemy tzw. operator różnicowania (*differencing operator*), definiowany jako  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - B)Y_t$ . Stanowi to klasyczne podejście Box-Jenkinsa do modelowania szeregów czasowych.

#### Modele ARIMA

Modele prognostyczne, które oparto na danych różnicowanych noszą nazwę zintegrowanych modeli autoregresji i średniej ruchomej. Mogą być zapisane przy pomocy notacji ARIMA(p,d,q), gdzie  $p$  oznacza rząd autoregresji,  $d$  – krotność różnicowania,  $q$  – wielkość opóźnienia średniej ruchomej.

Przykładowo model ARIMA(2,1,1) oznacza, że do zróżnicowanego z krokiem pierwszym szeregu czasowego zmiennej  $Y_t$  dopasowano model ARMA(2,1). Można to zapisać jako:

$$\Delta Y_t = \phi_0 + \phi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \phi_{t-2}(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}. \quad (2.12)$$

Również w tym przypadku dosyć często posługujemy się zapisem z wykorzystaniem operatorów różnicowania oraz operatorów opóźnień. Istnieje pomiędzy nimi zależność:  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - B Y_t = (1 - B)Y_t$ . Z tego wynika, że  $\Delta = (1 - B)$ , zaś  $\Delta^d = (1 - B)^d$ . Pozwala to nam zapisać  $d$ -krotnie zróżnicowany szereg czasowy jako:

$$\Delta^d Y_t = (1 - B)^d Y_t. \quad (2.13)$$

Zatem model ARIMA(p,d,q) można zapisać w zwężonej postaci:



$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \phi_0 + \theta(B)\varepsilon_t. \quad (2.14)$$

Przykładowo model ARIMA(2,1,1) zapiszemy jako:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_1 B^2)(1 - B)^1 Y_t = \phi_0 + (1 + \theta_1 B)\varepsilon_t.$$

## Modele SARIMA

Jeżeli zjawisko charakteryzuje się sezonowością, należy wówczas model rozszerzyć o parametry sezonowe. Modele takie określa się często modelami SARMA (dla stacjonarnych szeregów czasowych) oraz SARIMA (dla niestacjonarnych szeregów czasowych). Ten ostatni model może być opisany za pomocą notacji: SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)<sub>S</sub>, gdzie P, D, Q oznaczają odpowiednio: rząd autoregresji, różnicowania i opóźnienia średniej ruchomej sezonowej części modelu. Wartość parametru S wskazuje na liczbę okresów w roku, np. dla danych miesięcznych S=12.

Stacjonarny proces SARMA(p,q)(P,Q)<sub>S</sub> zapiszemy jako:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_{t-2} Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \Phi_1 Y_{t-S} + \Phi_2 Y_{t-2S} + \dots + \Phi_P Y_{t-PS} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \Theta_1 \varepsilon_{t-S} + \Theta_2 \varepsilon_{t-2S} + \dots + \Theta_Q \varepsilon_{t-QS}, \quad (2.15)$$

gdzie:

$\Phi$  i  $\Theta$  oznaczają sezonowe parametry części odpowiednio: autoregresyjnej i średniej ruchomej.

Niestacjonarność szeregu czasowego może również wynikać z faktu występowania wyraźnej sezonowości. W celu doprowadzenia szeregu czasowego do stacjonarności dokonuje się D-krotnego różnicowania z krokiem sezonowym. Polega to na obliczaniu różnic między wartościami szeregu czasowego pochodzącymi z analogicznych sezonów sąsiednich lat. Również tutaj posługujemy się sezonowymi operatorami różnicowymi:

$$\Delta_S Y_t = Y_t - Y_{t-S} = Y_t - B^S Y_t = (1 - B^S) Y_t. \quad (2.16)$$

Niestacjonarność może też być efektem zarówno występowania trendu, jak i wahań sezonowych. Szereg czasowy zróżnicowany z krokiem sezonowym i niesezonowym zapiszemy jako iloczyn dwóch operatorów  $(1-B)^d(1-B^S)^D Y_t$ .

Stąd ogólny zapis modelu SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)<sub>S</sub> jest następujący:

$$\phi(B)\Phi(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D Y_t = \phi_0 + \theta(B)\Theta(B^S)\varepsilon_t \quad (2.17)$$

gdzie:  $\Phi(B^S)$ ,  $\Theta(B^S)$  są wielomianami opóźnień dla części sezonowej. Przykładowo model SARIMA(2,1,1)(0,1,1)<sub>12</sub> zapiszemy jako:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_1 B^2)(1 - B)(1 - B^{12}) Y_t = \phi_0 + (1 + \theta_1 B)(1 + \Theta_1 B^{12}) \varepsilon_t.$$

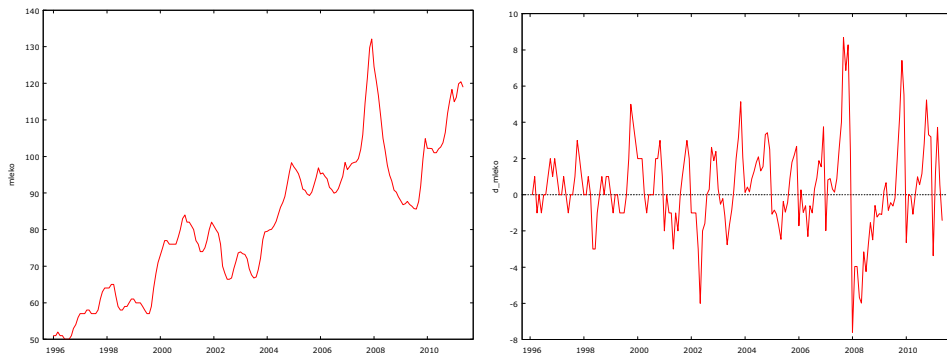
## 2.2. Identyfikacja modeli ARIMA

Identyfikacja modelu obejmuje ocenę stacjonarności szeregu czasowego, określenie przekształceń szeregu czasowego niezbędnych do uzyskania najlepszych właściwości modelu oraz wskazanie liczby parametrów (opóźnień) autoregresyjnych i średniej ruchomej sezonowej i niesezonowej części modelu.

### Ocena graficzna

Procedura identyfikacji rozpoczyna się od analizy graficznej szeregu czasowego celem wstępnego stwierdzenia występujących prawidłowości. Chodzi głównie o stwierdzenie struktury szeregu czasowego (trend, sezonowość) oraz stałości wariancji w czasie (zależności addytywne czy multiplikatywne). To determinuje dobór odpowiednich modeli oraz potencjalne przekształcenia danych.

**Rysunek 2.2.1. Szeregi czasowe cen skupu mleka w Polsce oraz ich pierwszych przyrostów (d\_mleko)**

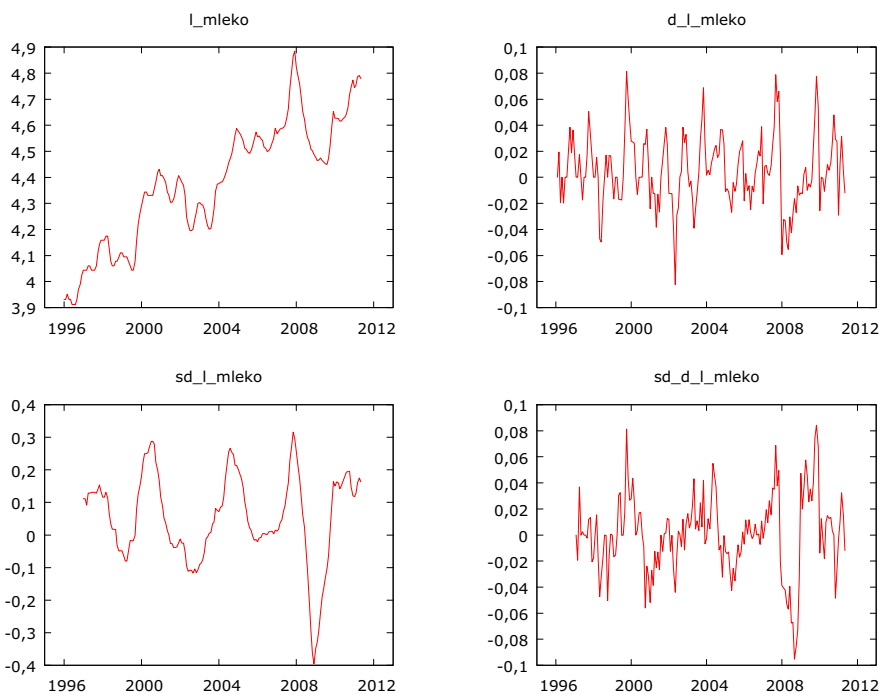


*Źródło: opracowanie własne.*

### Przekształcenia

Jeżeli struktura szeregu czasowego ma charakter multiplikatywny (przy wyższym poziomie zjawiska amplitudy wahań są większe), należy zastanowić się nad przekształceniem danych. Ich celem jest ustabilizowanie wariancji [Lütkepohl, Krätzig 2007; Makridakis i inni 1998]. Najczęściej stosowanym przekształceniem jest logarytmowanie danych (logarytm naturalny) lub transformacja Boxa-Cooka. Przykładowo na rysunku 2.2.1 przedstawiono ceny mleka w Polsce (lewa strona) i ich pierwsze różnice (prawa strona). Widzimy, że wariancja obydwu szeregów czasowych ulega zwiększeniu w czasie, co sugerować może konieczność transformacji szeregu czasowego w celu wyrównania jego wariancji.

**Rysunek 2.2.2. Szeregi czasowe logarytmów cen mleka ( $l\_mleko$ ) oraz logarytmów cen zróżnicowanych z: krokiem pierwszym ( $d\_l\_mleko$ ), z krokiem sezonowym ( $sd\_l\_mleko$ ) oraz z krokiem pierwszym i sezonowym ( $sd\_d\_l\_mleko$ )**



Źródło: opracowanie własne.

Logarytmowanie szeregu czasowego (rysunek 2.2.2) spowodowało wyrównanie wariacji w czasie. Dotyczy to zarówno wyjściowego szeregu czasowego ( $l\_mleko$ ), jak i szeregów zróżnicowanych: z krokiem pierwszym ( $d\_l\_mleko$ ), z krokiem sezonowym ( $sd\_l\_mleko$ ) oraz z krokiem pierwszym i sezonowym ( $sd\_d\_l\_mleko$ ). Wskazuje to, że lepszym rozwiązaniem jest oparcie modelu na logarytmowanym szeregu czasowym ( $\ln Y_t$ ) niż na szeregu czasowym poziomym cen ( $Y_t$ )

### Ocena stacjonarności

Oceniając stacjonarność szeregów czasowych, możemy skorzystać zarówno z oceny graficznej szeregu czasowego, analizy graficznej funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej (korelogramów), jak i wykorzystać testy statystyczne. Analiza graficzna szeregu czasowego sprowadza się do oceny, czy zjawisko w dłuższym okresie ma tendencję do zmiany swojej wartości oczekiwanej. Zatem jeżeli kształtuje się pod wpływem tendencji rozwojowej, to przyjąc

można, że jest to szereg niestacjonarny. Przykładem jest szereg czasowy nominalnych cen mleka (i jego logarytmów), gdzie zauważyć można, iż ceny w długim okresie charakteryzują się tendencją rozwojową. Niestacjonarność może wynikać również z istnienia wahań sezonowych, na co wskazują stabilne sezonowe cykle.

W praktyce jednoznaczne określenie typu niestacjonarności jest dyskusyjne. Natomiast sam wybór sposobu usunięcia trendu jest ważny i dosyć istotnie wpływa na wyniki analizy i prognozowania. Mianowicie, jeżeli założymy zmiany cen wokół trendu deterministycznego, to trend taki stanowi pewien stan równowagi, do którego ceny zmierzają w długim okresie. Z kolei założenie trendu stochastycznego powoduje, że ceny mogą znacznie odbiegać od poziomu trendu długookresowego i nie wracają do niego. Logika wskazuje, że miesięczne ceny surowców rolnych kształtują się raczej wokół trendu deterministycznego, odchylając się od niego w dół i w górę.

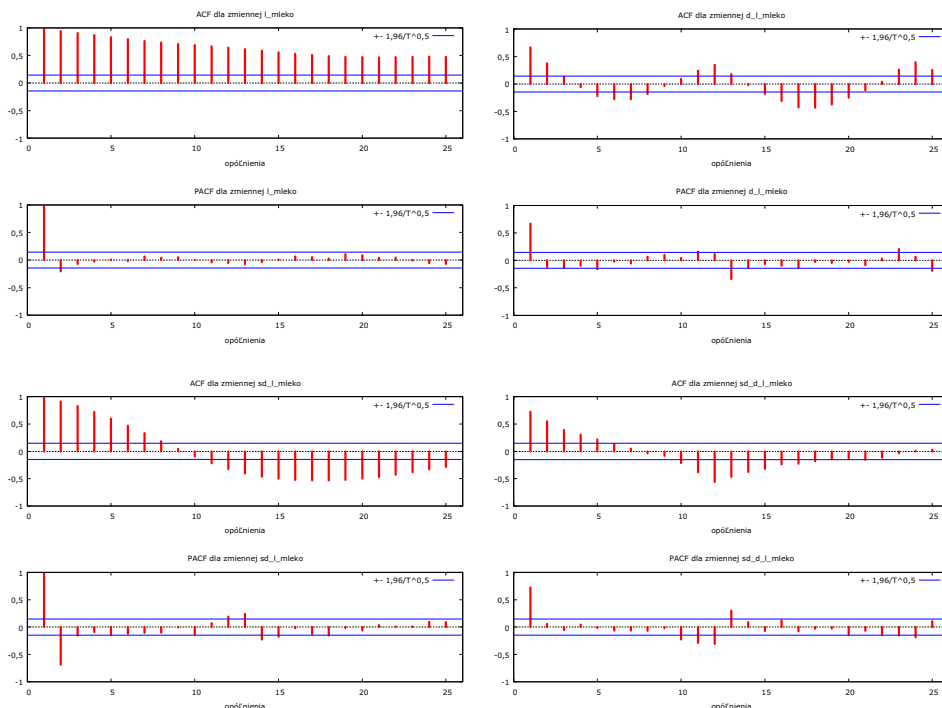
Innym sposobem stosowanym przez praktyków jest analiza wartości współczynników funkcji autokorelacji (ACF) i funkcji autokorelacji cząstkowej (PACF). Współczynniki autokorelacji obrazują zależności korelacyjne wewnątrz szeregu czasowego. ACF ( $r_k$ ) jest miarą korelacji szeregu czasowego z nim samym, ale opóźnionym o  $k$  okresów. Wartość współczynnika obliczana jest ze wzoru:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2} . \quad (2.18)$$

Współczynniki funkcji autokorelacji cząstkowej PACF oznaczane są jako ( $r_j$ ). Autokorelacja cząstkowa jest podobna do autokorelacji, ale dostarcza „czystsze” obrazu zależności dla poszczególnych opóźnień. Współczynnik ten służy do oceny stopnia powiązań pomiędzy wartościami szeregu czasowego w chwili  $t$ , a tym samym szeregiem czasowym, ale opóźnionym o  $k$  okresów w przypadku, gdy efekt wcześniejszych opóźnień został wyeliminowany. Idea jest podobna do współczynników korelacji cząstkowej.

Jeżeli współczynniki funkcji autokorelacji (ACF) bardzo powoli się zmniejszają, zaś współczynniki funkcji autokorelacji cząstkowej (PACF) są wysokie (bliskie jedności) dla pierwszego opóźnienia, a później szybko stają się nieistotne statystycznie, to wówczas można przyjąć, że szereg czasowy jest niestacjonarny. W przypadku stacjonarnych szeregów czasowych ACF szybko (wykładniczo, po kilku pierwszych okresach lub w formie sinusoidalnej) przyjmuje wartości bliskie zeru.

**Rysunek 2.2.3. Wykresy autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF) szeregów czasowych logarytmów cen mleka i ich różnic (pierwszych d, sezonowych, s oraz pierwszych i sezonowych s,d)**



*Źródło: opracowanie własne.*

Dla szeregu czasowego logarytmów cen mleka z rysunku 2.2.2 w programie GRETL obliczono współczynniki ACF i PACF. Przedstawiono je na rysunku 2.2.3. Zauważyć można, że szereg czasowy `l_mleko` jest niestacjonarny. Jeżeli uznamy szereg czasowy za niestacjonarny, to należy doprowadzić go do stacjonarności. Najczęściej polega to na zastosowaniu operacji różnicowania. Przy czym różnicować można z krokiem pierwszym (różnice między sąsiednimi obserwacjami) i/lub krokiem sezonowym (różnice między analogicznymi okresami w sąsiednich latach). Decyzja co do różnicowania sezonowego nie jest prosta – generalnie w przypadku wyraźnej sezonowości należy to zrobić, zaś w przypadku, gdy sezonowość jest nieznaczna, wystarczy tylko uwzględnić opóźnienia sezonowe.

Zróżnicowanie z krokiem pierwszym spowodowało wyeliminowanie trendu (szereg czasowy `d_l_mleko`, rysunek 2.2.2). Jednak sinusoidalne zachowanie ACF (sinusoidy nie są tłumione) otrzymanego szeregu czasowego z mak-

symalnymi wielkościami stanowiącymi krotność cyklu sezonowego wskazywać może na niestacjonarność z uwagi na wahania sezonowe.

Stąd w kolejnym kroku dokonano różnicowania zarówno z krokiem pierwszym, jak i sezonowym ( $sd\_d\_1\_mleko$ ). Szereg ten na pewno jest stacjonarny. Natomiast możliwe jest również przeróżnicowanie danych – wykonanie za dużej liczby różnicowań.

Można też wyjść od sezonowego różnicowania – najpierw spróbować przekształcić dane, obliczając różnice między obserwacjami pochodzącymi z analogicznych okresów w kolejnych latach. Wykresy ACF (malejący wykładniczo) i PACF (urywający się po dwóch okresach) wskazują, że szereg czasowych sezonowych różnic logarytmów cen ( $sd\_l\_ceny$ ) może być uznany za bliiski stacjonarnemu (jest to subiektywna ocena).

Wśród testów statystycznych służących ocenie stacjonarności wyróżnia się między innymi: test Dickeya-Fullera (DF i ADF), test Dickeya, Haszy i Fullera (DHF – do testowania sezonowej integracji) czy test KPSS (Kwiatkowskiego, Philllipsa, Schmidta i Shina). Spośród nich najczęściej stosuje się testy pierwiastka jednostkowego Dickeya-Fullera [Maddala 2006; Kufel 2007].

Z uwagi na to, że szeregi czasowe charakteryzują się autokorelacją, praktycznie posługujemy się rozszerzonymi testami Dickeya-Fullera na pierwiastek jednostkowy (ADF). W równaniach testujących przyrosty zmiennej są funkcją opóźnionej zmiennej oraz (ewentualnie) zmiennych deterministycznych. Dodatkowo do równań włącza się opóźnione pierwsze różnice celem uwzględnienia wpływu autokorelacji. Maksymalne opóźnienie  $k$  dobieramy jako najmniejsze opóźnienie, przy którym składnik losowy nie wykazuje autokorelacji. Należy dodać, że testy są bardzo wrażliwe na liczbę opóźnień. W teście tym hipoteza zerowa ( $H_0$ ) zakłada, że analizowany szereg czasowy jest niestacjonarny.

Do weryfikacji hipotezy zerowej wykorzystujemy następujące modele:

- model bez wyrazu wolnego:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \gamma_k \Delta Y_{t-k} + \varepsilon_t \quad (2.19)$$

- model z wyrazem wolnym:

$$\Delta Y_t = \alpha + \delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \gamma_k \Delta Y_{t-k} + \varepsilon_t \quad (2.20)$$

- model z wyrazem wolnym i trendem liniowym:

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \gamma_k \Delta Y_{t-k} + \varepsilon_t, \quad (2.21)$$

gdzie:

$t$  – zmienna czasowa,

$\alpha_1, \alpha_0, \delta_1$  - parametry modelu,

$Y_{t-1}$  – wartości obserwacji,

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}.$$

Istotnie mniejsza od zera wartość parametru  $\delta$  wskazuje na stacjonarność szeregu czasowego ( $Y_t \sim I(0)$ ). Odrzucenie hipotezy zerowej kończy procedurę.

**Tabela 2.2.1. Wyniki testu ADF dla logarytmów cen mleka i ich pierwszych przyrostów**

Rozszerzony test Dickeya-Fullera dla procesu l_mleko	Rozszerzony test Dickeya-Fullera dla procesu d_l_mleko
dla opóźnienia rzędu 2 procesu (1-L)l_mleko liczebność próby 182 Hipoteza zerowa: występuje pierwiastek jednostk. a=1; proces I(1)	dla opóźnienia rzędu 2 procesu (1-L)d_l_mleko liczebność próby 181 Hipoteza zerowa: występuje pierwiastek jednostk. a=1; proces I(1)
test bez wyrazu wolnego (const) model: (1-L)y = (a-1)*y(-1) + ... + e Autokorelacja reszt rzędu pierwszego: -0,008 estymowana wartość (a-1) wynosi: 0,000332383 Statystyka testu: tau_nc(1) = 0,978614 asymptotyczna wartość p = 0,9138	test bez wyrazu wolnego (const) model: (1-L)y = (a-1)*y(-1) + ... + e Autokorelacja reszt rzędu pierwszego: -0,003 estymowana wartość (a-1) wynosi: -0,404038 Statystyka testu: tau_nc(1) = -6,26694 asymptotyczna wartość p = 1,093e-009
test z wyrazem wolnym (const) oraz sezonowymi zmiennymi 0-1 model: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + ... + e Autokorelacja reszt rzędu pierwszego: 0,011 estymowana wartość (a-1) wynosi: -0,00587577 Statystyka testu: tau_c(1) = -1,21905 asymptotyczna wartość p = 0,6686	test z wyrazem wolnym (const) oraz sezonowymi zmiennymi 0-1 model: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + ... + e Autokorelacja reszt rzędu pierwszego: 0,012 estymowana wartość (a-1) wynosi: -0,307989 Statystyka testu: tau_c(1) = -4,76577 asymptotyczna wartość p = 6,003e-005
z wyrazem wolnym i trendem liniowym oraz sezonowymi zmiennymi 0-1 model: (1-L)y = b0 + b1*t + (a-1)*y(-1) + ... + e Autokorelacja reszt rzędu pierwszego: -0,000 estymowana wartość (a-1) wynosi: -0,0391376 Statystyka testu: tau_ct(1) = -3,33583 asymptotyczna wartość p = 0,06049	z wyrazem wolnym i trendem liniowym oraz sezonowymi zmiennymi 0-1 model: (1-L)y = b0 + b1*t + (a-1)*y(-1) + ... + e Autokorelacja reszt rzędu pierwszego: 0,012 estymowana wartość (a-1) wynosi: -0,307736 Statystyka testu: tau_ct(1) = -4,74346 asymptotyczna wartość p = 0,0005485

Źródło: opracowanie własne.

Jeżeli nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, wnioskuje się, że szereg jest szeregiem niestacjonarnym natomiast nie wiemy, w jakim stopniu szereg czasowy jest zintegrowany. Wiemy tylko, że szereg jest zintegrowany co najmniej w stopniu pierwszym ( $Y_t \sim I(1)$ ), na co wskazuje równy zeru współczynnik  $\delta$  stojący przy opóźnionej zmiennej. Wówczas całą procedurę testowania należy powtórzyć dla szeregu pierwszych różnic. Za zmienną  $Y_t$  przyjmuje się  $\Delta Y_t$ , a za zmienną  $\Delta Y_{t-1}$  drugie różnice, tj.  $\Delta \Delta Y_{t-1} = \Delta Y_{t-1} - \Delta Y_{t-2}$ . Jeżeli pierwsze różnice okażą się stacjonarne ( $H_0$  zostanie odrzucona), to wówczas mamy podstawy aby przypuszczać, że szereg jest zintegrowany w stopniu pierwszym.

Niestety, nie ma jednoznacznych kryteriów wyboru równań testowych. W praktyce najczęściej stosujemy drugie i trzecie równanie równocześnie. Pozwala to nam w przybliżeniu ocenić typ niestacjonarności. Jeżeli nie odrzucimy  $H_0$  w drugim równaniu, a zrobimy to dla równania trzeciego, to należy sądzić, że badany szereg czasowy jest trendostacjonarny.

Przykładowo, zastosowanie rozszerzonego testu Dickeya-Fullera z wyrazem wolnym dla szeregu czasowego logarytmów cen mleka ( $l\_mleko$ ) i jego pierwszych różnic ( $d\_l\_mleko$ ) dało wyniki zamieszczone w tabeli 2.2.1. W równaniach tych założono występowanie sezonowości oraz uwzględniono dwa opóźnienia celem wykluczenia wpływu autokorelacji. Na brak stacjonarności wskazuje bliska zeru wartość wyrażenia  $(a-1)=\delta$  (równocześnie wartość  $p>0,05$ ). Zatem szereg czasowy logarytmów cen mleka jest zintegrowany w stopniu pierwszym (brak podstaw do odrzucenia  $H_0$ ,  $p>0,05$ ). Z kolei pierwsze różnice cen są stacjonarne ( $p<0,05$ ). Równocześnie test z wyrazem wolnym i trendem liniowym oraz sezonowymi zmiennymi 0-1 wykazał istnienie pewnego prawdopodobieństwa, że szereg czasowy może być trendostacjonarny. Oznacza to, że właściwym sposobem może być eliminacja trendu poprzez dopasowanie funkcji liniowej.

**Tabela 2.2.2. Wyniki testu ADF dla szeregów czasowych: sezonowych przyrostów logarytmów cen mleka oraz pierwszych i sezonowych przyrostów logarytmów cen mleka**

Rozszerzony test Dickeya-Fullera dla procesu $sd\_l\_mleko$	Test Dickeya-Fullera dla procesu $sd\_d\_l\_mleko$
dla opóźnienia rzędu 2 procesu $(1-L)sd\_l\_mleko$ liczebność próby 170 Hipoteza zerowa: występuje pierwiastek jednostk. $a = 1$ ; proces $I(1)$	bez opóźnień liczebność próby 171 Hipoteza zerowa: występuje pierwiastek jednostk. $a = 1$ ; proces $I(1)$
test bez wyrazu wolnego (const) model: $(1-L)y = (a-1)*y(-1) + \dots + e$ Autokorelacja reszt rzędu pierwszego: 0,009 estymowana wartość $(a-1)$ wynosi: -0,0410731 Statystyka testu: $\tau_{nc}(1) = -3,73482$ asymptotyczna wartość $p = 0,0001$	test bez wyrazu wolnego (const) model: $(1-L)y = (a-1)*y(-1) + e$ Autokorelacja reszt rzędu pierwszego: -0,039 estymowana wartość $(a-1)$ wynosi: -0,277455 Statystyka testu: $\tau_{nc}(1) = -5,22784$ wartość $p = 4,605e-007$
test z wyrazem wolnym (const) model: $(1-L)y = b_0 + (a-1)*y(-1) + \dots + e$ Autokorelacja reszt rzędu pierwszego: 0,007 estymowana wartość $(a-1)$ wynosi: -0,0481025 Statystyka testu: $\tau_{c}(1) = -4,08007$ asymptotyczna wartość $p = 0,001044$	test z wyrazem wolnym (const) model: $(1-L)y = b_0 + (a-1)*y(-1) + e$ Autokorelacja reszt rzędu pierwszego: -0,039 estymowana wartość $(a-1)$ wynosi: -0,277469 Statystyka testu: $\tau_{c}(1) = -5,21231$ wartość $p = 1,576e-005$

*Źródło: opracowanie własne.*



Wcześniej analizując rysunek 2.2.1 sugerowaliśmy, że szereg logarytmów cen mleka może być niestacjonarny z uwagi na wahania sezonowe. Stąd zastosowano test ADF dla sezonowych różnic logarytmów cen (tabela 2.2.2). Nie odrzucono hipotezy zerowej zarówno w teście z wyrazem wolnym, jak i bez wyrazu wolnego. Stąd wnioskujemy, że różnicując szereg czasowy tylko z krokiem sezonowym otrzymujemy szereg stacjonarny. Również szereg czasowy różnic sezonowych i pierwszych jest szeregiem stacjonarnym. Wnioskujemy o tym na podstawie testu DF, którego wyniki przedstawiono w prawej kolumnie tabeli 2.2.2.

### Identyfikacja modelu

Po stwierdzeniu stacjonarności szeregu czasowego lub po doprowadzeniu go do stacjonarności należy dokonać identyfikacji modelu. Innymi słowy, musimy zdecydować, ile parametrów autoregresyjnych, a ile średniej ruchomej należy włączyć, aby uzyskać dobry, a jednocześnie oszczędny (o jak najmniejszej liczbie parametrów) model. W praktyce bardzo rzadko liczby parametrów modelu przekraczają 2-3.

W prostym ujęciu (bez sezonowości) identyfikacja polega na porównaniu teoretycznych funkcji autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowych (PACF) odpowiednich procesów ARIMA z ich empirycznymi odpowiednikami otrzymanymi na podstawie wartości szeregu prognozowanego lub szeregu otrzymanego w wyniku przekształceń (logarytmowanie, różnicowanie).

W przypadku czystego procesu autoregresyjnego funkcja ACF opada wykładniczo lub ma charakter sinusoid tłumionych, zaś funkcja PACF jest skończona i urywa się (staje się nieistotna) po odstępie  $p$ . Jeżeli mamy do czynienia z procesem średniej ruchomej, sytuacja jest odwrotna. Funkcja ACF jest skończona, a jej istotne współczynniki urywają się po odstępie  $q$ , zaś funkcja PACF jest nieskończona i zdominowana przez zanikające funkcje wykładnicze oraz/lub tłumione sinusoidy. W przypadku modeli mieszanych mamy do czynienia z funkcjami nieskończonymi [Box, Jenkins 1983].

W świetle wcześniejszych rozważań potencjalnie możemy się opierać na szeregu czasowym zróżnicowanym z krokiem pierwszym ( $d_1$ \_mleko), z krokiem sezonowym ( $sd_1$ \_mleko) oraz z krokiem pierwszym i sezonowym ( $sd_d_1$ \_mleko). Są to szeregi, co do których możemy przypuszczać, że są stacjonarne. Taka niejasność oczywiście nie ułatwia nam zadania.

Gdybyśmy opierali się na logarytmicznych cenach różnicowanych z krokiem pierwszym, to analiza graficzna ACF i PACF dla  $d_1$ \_ceny wskazuje nam model ARIMA (1,1,0)(2,0,0)<sub>12</sub>. Z kolei mając za podstawę szereg czasowy

sd\_1\_mleko, proponowanym modelem byłyby ARIMA (2,0,0)(1,1,0)<sub>12</sub>. Natomiast różnicując model zarówno z krokiem pierwszym, jak i sezonowym, potencjalne modele to ARIMA (1,1,0)(1,1,0)<sub>12</sub> lub ARIMA (1,1,0)(0,1,1)<sub>12</sub>.

Podejście powyższe jest dość efektywne w przypadku czystych modeli AR i MA. W przypadku modeli mieszanych oraz modeli z częścią sezonową literatura wskazuje, że bardziej zasadnym podejściem jest wybór modelu na podstawie kryteriów dopasowania modelu do danych, a następnie ocena istotności parametrów i rozkładu składnika resztowego. Do kryteriów tych należy np. kryterium informacyjne Akaike'a (AIC), Schwarza (BIC) czy Hannana-Quinna (HQ) [Lütkepohl, Krätzig 2007; Maddala 2006]. W literaturze spotyka się te same kryteria (np. AIC) przyjmujące różną postać, stąd nie będziemy podawali żadnych wzorów<sup>1</sup>. Generalnie zawierają w sobie dwa komponenty: jeden opisujący stopień dopasowania do danych, a drugi określający stopień złożoności modelu (czynnik karzący, *penalty term*).

Co istotne, ich istota jest zbliżona do współczynnika determinacji skorygowanego ze względu na stopnie swobody. Dzięki odpowiednio sformułowanym wagom i funkcjom, łączą ocenę stopnia dopasowania modelu z jego prostotą. Chodzi o to, że dodawanie kolejnych opóźnień (parametrów) daje coraz mniejszy wkład w wyjaśnianie zjawiska. Stąd należy zachować umiar w liczbie użytych parametrów poprzez „karanie” za każdy dodatkowy parametr. Stąd porównując różne modele powinniśmy wybierać te, które charakteryzują się najniższą wartością danego kryterium informacyjnego.

**Tabela 2.2.3. Wartości kryteriów informacyjnych dla wybranych modeli cen mleka**

Model ARIMA	Kryt. Akaike'a	Kryt. Schwarza	Kryt. Hannana-Quinna
(1,1,0)(2,0,0) <sub>12</sub>	-971,2614	-955,1868	-964,7462
(2,0,0)(1,1,0) <sub>12</sub>	-899,3028	-883,5364	-892,9065
(2,0,0)(0,1,1) <sub>12</sub>	-930,2863	-914,5198	-923,8899
(1,1,0)(1,1,0) <sub>12</sub>	-890,5936	-878,0036	-885,4855
(1,1,0)(0,1,1) <sub>12</sub>	-921,4893	-908,8993	-916,3812

*Źródło: opracowanie własne.*

Wartości powyższych kryteriów przedstawiono w tabeli 2.2.3. Najniższe wartości informacyjne mamy w przypadku szeregów czasowych różnicowanych jednokrotnie, w tym najniższe przy różnicowaniu niesezonowym. Stąd te modele są preferowane względem modeli różnicowanych z krokiem pierwszym i se-

<sup>1</sup> Przykładowe wzory na wybrane kryteria przedstawiono w rozdziale 3.2.1.

zonowym (ostatnie dwa). Problem w tym, że trudno jest porównywać ze sobą modele o różnej liczbie różnicowań. Często też różne kryteria wskazują na odmienne optymalne modele.

Oprócz wskazanych wyżej parametrów należy zdecydować, czy w modelu znajdzie się stała. W modelach nieróżnicowanych stała zazwyczaj występuje, w modelach jednokrotnie różnicowanych może, ale nie musi, natomiast w przypadku różnicowania wyższego rzędu w praktyce modele budowane są bez stałej.

### **2.3. Estymacja i weryfikacja modeli ARIMA**

Mając zidentyfikowany model lub kilka ich propozycji, należy dokonać estymacji nieznanymi parametrów autoregresji i średniej ruchomej (oraz wyrazu wolnego). Z praktycznego punktu widzenia nie stanowi to żadnego problemu, ponieważ procedury estymacji są standardem większości dostępnych pakietów statystycznych.

#### **Estymacja modeli**

Wybór metody estymacji uzależniony jest od rodzaju modelu. Najprostsza sytuacja jest w przypadku modeli autoregresji. Parametry takich modeli można oszacować klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, traktując zmienne opóźnione w czasie jako zmienne objaśniające. Minimalizujemy wówczas sumę kwadratów reszt modelu. W przypadku modeli średniej ruchomej i mieszanych modeli autoregresji i średniej ruchomej do estymacji wykorzystuje się procedury iteracyjne. Jest to z reguły metoda największej wiarygodności (MNW), która może być oparta na różnych algorytmach. Metodę tę można stosować również do oszacowania parametrów modeli posiadających tylko część autoregresyjną.

Jedną z prostszych jest warunkowa MNW oparta na algorytmie BHHH [Maddala 2006, s. 656-658]. Jest ona oprogramowana m.in. w ogólnie dostępnym programie statystycznym Gretl (opcja „warunkowa metoda największej wiarygodności”). W skrócie można napisać, że jej celem jest odnalezienie takiej kombinacji parametrów (w tym wyrazu wolnego), która pozwala na minimalizację sumy kwadratów reszt modelu prognoz z jednookresowym wyprzedzeniem.

To, jaki algorytm zostanie wybrany do estymacji modeli ma olbrzymi wpływ na wartości oszacowywanych parametrów oraz na wartości uzyskiwanych prognoz. Doświadczenie autora pokazuje np., że warunkowa MNW jest mniej wrażliwa rachunkowo niż właściwa MNW. Również liczba iteracji i kryterium zbieżności mają znaczenie w przypadku szacowania parametrów modelu.

## Weryfikacja modeli

Weryfikacja modeli ARIMA zasadniczo podobna jest do weryfikacji innych modeli ekonometrycznych. Obejmuje bowiem ocenę dopasowania do danych empirycznych, analizę istotności parametrów strukturalnych i ocenę rozkładu składnika losowego. W przypadku modeli ARIMA dodatkowo analizuje się stacjonarność i odwracalność modelu. Dobry model ARIMA to taki, który posiada istotne parametry, jest stacjonarny i odwracalny oraz w którym brak jest składnika systematycznego w resztach. Reszty powinny być procesem białego szumu: losowe (wokół zera), o rozkładzie normalnym oraz bez istotnych autokorelacji [Evans 2003].

Często zdarza się, że wstępnie wyselekcjonowany model charakteryzuje się nieistotnymi zmiennymi (opóźnieniami). Zatem część z nich powinna zostać usunięta. Najogólniej można napisać, że parametry modelu autoregresyjnego powinny być statystycznie istotne nawet przy najdalszym opóźnieniu. Istotność zmiennych oceniamy na podstawie statystyki  $Z$  lub wartości  $p$  ( $p$ -value). Przyjmując poziom istotności 0,05 zmienne są istotne wówczas, gdy wartość  $p$  jest mniejsza niż 0,05.

W tabeli 2.3.1 przedstawiono przykładowy wydruk (dla modelu  $ARIMA(1,1,0)(2,0,0)_{12}$  najważniejszych statystyk towarzyszących procesowi estymacji i weryfikacji modelu. Wynika z niego, że wszystkie zmienne (współczynniki) oprócz wyrazu wolnego są statystycznie istotne.

**Tabela 2.3.1. Estymacja modelu ARIMA (1,1,0)(2,0,0) za pomocą WMNW – wydruk programu Gretl (obserwacje 1996:02-2011; zmienna zależna: (1-L) l\_mleko)**

Parametr	Współczynnik	Błąd stand.	z	wartość p
const	0,00610083	0,00928996	0,6567	0,51137
phi_1	0,687102	0,0530041	12,9632	<0,00001
Phi_1	0,288631	0,0682368	4,2298	0,00002
Phi_2	0,355772	0,0726953	4,8940	<0,00001
Średn.aryt.zm.zależnej	0,004605	Odch.stand.zm.zależnej		0,026398
Średnia zaburzeń los.	-0,000041	Odch.st. zaburzeń los.		0,016518
Logarytm wiarygodności	490,6307	Kryt. inform. Akaike'a		-971,2614
Kryt. bayes. Schwarza	-955,1868	Kryt. Hannana-Quinna		-964,7462
	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Okresowość
AR				
Pierwiastek 1	1,4554	0,0000	1,4554	0,0000
AR (sezonowe)				
Pierwiastek 1	1,3193	0,0000	1,3193	0,0000
Pierwiastek 2	-2,1306	0,0000	2,1306	0,5000

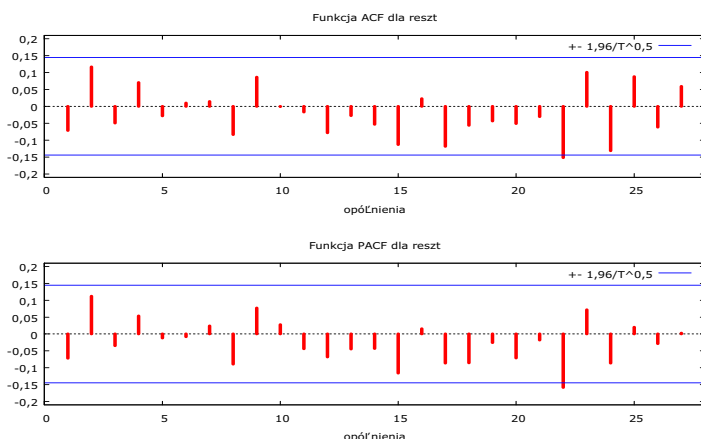
Źródło: opracowanie własne.

Dużo uwagi podczas diagnostyki poświęca się analizie niezależności reszt, tj. ocenie występowania autokorelacji. Można w tym celu wykorzystać wykresy autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF) dla reszt modelu lub dokonać tego na podstawie testu Ljung-Boxa.

Przydatność wykresów ACF i PACF (korelogramów) wiąże się z tym, że obok stwierdzenia prawidłowości w resztach można z nich odczytać, w jaki sposób taki model poprawić. Może się bowiem okazać, że wstępnie wyselekcjonowany model powinien być uzupełniony o dalsze opóźnienia. Korelogramy reszt umożliwiają ustalenie, ile dodatkowych opóźnień AR lub MA należy uwzględnić jeszcze w modelu, aby model dobrze opisywał strukturę procesu. Jeżeli występują statystycznie istotne współczynniki autokorelacji na wykresie ACF to oznacza, że należy dodać więcej opóźnień średniej ruchomej.

W przypadku prawidłowego modelu współczynniki ACF i PACF reszt powinny być statystycznie nieistotne, tzn. mniejsze co do wartości bezwzględnej od wartości krytycznej liczonej jako  $1,96/\sqrt{n}$ . W rzeczywistości trudno jest uniknąć pojedynczych istotnych współczynników autokorelacji, dlatego należy dbać o ich brak w pierwszych kilku okresach i pierwszym opóźnieniu sezonowym. Na rysunku 2.3.1 przedstawiono przykładowe korelogramy reszt modelu. Widzimy, że brak jest statystycznie istotnych zależności liniowych w resztach. Jedynie dla opóźnienia równego 22 współczynniki przekraczają wartości krytyczne. Natomiast trudno je dodatkowo uwzględnić z uwagi na to, że nie są krotkością opóźnienia sezonowego.

**Rysunek 2.3.1. Wykresy autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF) reszt modelu ARIMA(1,1,0)(2,0,0)**



*Źródło: opracowanie własne.*

O braku autokorelacji reszt (własnościach białośumowych) wnioskować można również na podstawie testu Ljung-Boxa. Test ten pozwala ocenić istotność współczynników autokorelacji  $r_j$  dla zadanego danego rzędu opóźnień. Statystyka testowa modelu jest następująca [Makridakis i inni 1998]:

$$Q = n(n+2) \sum_{j=1}^m \frac{r_j^2}{n-j}, \quad (2.22)$$

gdzie :

$n$  – liczba obserwacji szeregu czasowego,

$j$  – przyjęty rząd badanych opóźnień: 1, 2, ..., m.

W dobrym modelu statystyka  $Q$  powinna być możliwie jak najniższa (przy jednoczesnym  $p > 0,05$  lub  $p > 0,1$ ). W naszym przypadku dla każdego opóźnienia do 27 miesiąca współczynniki  $Q$  przyjmują niskie wartości i są statystycznie nieistotne.

Dobry model ARIMA powinien być stacjonarny i odwracalny. Wynika to z dwoistej struktury procesów AR i MA. Stacjonarność procesu autoregresyjnego ma miejsce, jeżeli wszystkie pierwiastki jednostkowe wielomianu charakterystycznego AR są większe co do modułu od jedności. Stacjonarny proces AR można przedstawić jako nieskończony proces MA. Odwracalność procesu średniej ruchomej ma miejsce, jeżeli wszystkie pierwiastki jednostkowe wielomianu charakterystycznego MA są większe co do modułu od jedności. Odwracalny proces MA można przedstawić jako nieskończony proces AR. W tabeli 2.3.1 moduły wszystkich pierwiastków są większe od jedności, co wskazuje na pożądane właściwości analizowanego modelu.

Prognozy punktowe na podstawie modeli ARIMA oblicza się w oparciu o skonstruowany model jako wartość oczekiwaną procesu stochastycznego o znanych charakterystykach dla okresów przeszłych. Prognozy w modelach ARIMA są obliczane po cofnięciu wszystkich przekształceń i różnicowań. Prognozy modelu ARIMA mogą być funkcją przeszłych danych, prognoz wykonanych na wcześniejsze momenty oraz błędów prognoz (reszt). Ogólnie możemy to zapisać jako:

$$\hat{Y}_{t+h} = E(\hat{Y}_{t+h} | Y_t, \hat{Y}_{t+h}, e_t). \quad (2.23)$$

Przy prognozowaniu na dalsze okresy z uwagi na brak przeszłych wartości do modelu podstawiane są wartości prognoz na poprzednie okresy.



## 3. Metody sezonowej korekty danych: X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS

### 3.1. Wprowadzenie

Jakość modeli klasy ARIMA, w tym otrzymywanych z nich prognoz, jest z reguły satysfakcjonująca. Jednakże, pomimo swojej elastyczności pod względem doboru parametrów, modele te nie są w stanie oddać złożoności procesów generujących analizowany szereg czasowy. Problem ten dotyczy między innymi składnika sezonowego, którego przebieg jest z reguły zmienny w czasie i podlega zaburzeniom wywołanym przez czynniki zewnętrzne. Z tego powodu, do analizy i prognozowania szeregów czasowych o częstotliwości krótszej niż roczna, wykorzystywane są często metody sezonowej korekty danych<sup>2</sup>. Najpopularniejsze z nich to metody X-12-ARIMA<sup>3</sup> [Ladiray, Quenneville 2001, Findley i inni 1998] i TRAMO/SEATS<sup>4</sup> [Maravall 2008a; Maravall 2008b], które wykorzystują w stosowanych przez siebie algorytmach metodologię ARIMA<sup>5</sup>.

Wymienione powyżej metody pozwalają na wydzielenie z szeregu czasowego jego poszczególnych składowych, tj:

- trendu i cyklu (TC), obrazujących oscylacje szeregu czasowego trwające dłużej niż jeden rok,
- wahań sezonowych (S), czyli powtarzających się w obrębie jednego roku odchyłeń od trendu-cyklu; wywołane przez klimat, uwarunkowania instytucjonalne oraz krótkookresowe, cykliczne zmiany aktywności ekonomicznej uczestników rynku,
- wahań nieregularnych (I), na które składają się fluktuacje o charakterze losowym.

---

<sup>2</sup> Z reguły metody te są wykorzystywane do analizy szeregów czasowych o częstotliwości miesięcznej i kwartalnej.

<sup>3</sup> X-12-ARIMA została opracowana przez *United States Census Bureau*. Szczegółowy opis metody i program źródłowy są dostępne pod adresem: <http://www.census.gov>.

<sup>4</sup> Metoda TRAMO/SEATS, której twórcami są V. Gomez i A. Maravall, jest wspierana i rozwijana przez Centralny Bank Hiszpanii (*Bank of Spain*). Szczegółowe informacje o TRAMO/SEATS dostępne są na stronie <http://www.bde.es>.

<sup>5</sup> Obie wymienione metody są rekomendowane przez Eurostat i Europejski Bank Centralny do wykonywania przez krajowe instytucje statystyczne i banki centralne do sezonowej korekty danych sprawozdawczych.



Szereg czasowy może być zatem rozumiany jako suma wahań o różnej częstotliwości występowania. Powyższa dekompozycja jest wykonywana w celu usunięcia z szeregu składnika sezonowego, a następnie składnika długookresowego i wahań przypadkowych. Nie dokonujemy tutaj podziału trendu i cyklu (TC) na trend (T) i wahania cykliczne (C).

Każda z tych metod jest wyraźnie podzielona na dwa etapy: fazę wstępnego modelowania szeregu czasowego, mającą na celu m.in. oczyszczenie szeregu czasowego z wpływu zaburzeń o charakterze szokowym oraz etap, w którym dokonywana jest właściwa dekompozycja szeregu czasowego, obliczenie prognoz i ocena jakości przyjętego modelu.

Wstępne modelowanie szeregu czasowego, nieobecne w metodologii ARIMA, ma kluczowe znaczenie dla jakości otrzymywanych wyników. Polega ono na identyfikacji różnego rodzaju obserwacji nietypowych, jakie oddziaływały na szereg w okresie objętym próbą, a także na testowaniu wpływu świąt stałych i ruchomych oraz innych czynników zewnętrznych na analizowane dane. Czynniki te powodują występowanie nieliniowości w modelu, toteż są one szacowane i usuwane z szeregu czasowego przed rozpoczęciem zasadniczej estymacji. Proces ten nazywany jest linearyzacją szeregu czasowego. Po zakończeniu dekompozycji usunięte wcześniej elementy są dodawane do odpowiednich komponentów szeregu czasowego lub są wykazywane w osobnych kategoriach. Ponadto na tym etapie określany jest rodzaj zależności pomiędzy komponentami szeregu czasowego oraz wyliczane są prognozy wykorzystywane na dalszym etapie estymacji. Szczegółowy opis algorytmów X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS został przedstawiony poniżej.

### 3.2. Metoda X-12-ARIMA

X-12-ARIMA jest procedurą dekompozycji szeregu czasowego  $Y_t$  w oparciu o filtry średnich ruchomych, ogólnie zdefiniowanych jako:

$$M(Y_t) = \sum_{k=-p}^{+f} \theta_k Y_{t+k}, \quad (3.1)$$

gdzie  $\theta_k$  – parametry modelu średniej ruchomej.

Wartość  $p+f+1$  nosi nazwę rzędu procesu średniej ruchomej. Zastosowanie powyższych filtrów prowadzi do wygładzenia szeregu czasowego, gdyż bieżąca obserwacja jest zastępowana ważoną średnią tej obserwacji oraz obserwacji poprzedzających i opóźnionych względem niej. W przypadku gdy  $p$  jest równe  $f$ , średnia ruchoma jest scentrowana. Symetryczna średnia ruchoma to średnia ru-

choma scentrowana, dla której  $\theta_k = \theta_{-k}$  dla każdego  $k$ . Symetryczną średnią ruchomą można przedstawić w postaci równania 3.2 [Planas 1998]:

$$M(Y_t) = \left( \theta_0 + \sum_{k=1}^p \theta_k (B^k + B^{-k}) \right) Y_t, \quad (3.2)$$

gdzie  $B$  – operator opóźnień (por. rozdział 2.1.1).

Do szacowania trendu i wahań sezonowych używane są podwójne średnie ruchome. Są one otrzymywane przez nałożenie na scentrowaną, symetryczną średnią ruchomą rzędu  $P$  o współczynnikach równych  $1/P$  scentrowanej, symetrycznej średniej ruchomej rzędu  $Q$  o współczynnikach równych  $1/Q$ . Rząd podwójnej średniej ruchomej jest oznaczany jako  $P \times Q$ . Dla nieparzystych wartości  $P$  i  $Q$  podwójna średnia ruchoma  $M_{P \times Q}(Y_t)$  jest wyrażona jako [Grudkowska, Paśnicka 2007]:

$$M_{(2k+1) \times (2n+1)}(Y_t) = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^k S_{t+sj}^{2n+1}, \quad (3.3)$$

gdzie:

$$S_t^{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n Y_{t+sj},$$

$$2k+1 = P,$$

$$2n+1 = Q,$$

$s$  – liczba obserwacji przypadająca na jeden rok.

Dla parzystych wartości  $P$  i  $Q$  wzór 3.3 przyjmuje postać:

$$M_{2k \times 2n}(Y_t) = \frac{1}{2k} \sum_{j=-k+1}^{k-1} S_{t+sj}^{2n}, \quad (3.4)$$

gdzie:

$$S_t^{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{j=-n+1}^{n-1} Y_{t+sj},$$

$$2k = P,$$

$$2n = Q,$$

$s$  – liczba obserwacji przypadająca na jeden rok.

Przykładowo, współczynniki średniej ruchomej  $3 \times 5$  przyjmują wartości  $\{1, 2, 3, 3, 3, 2, 1, \}$ , a współczynniki dla średniej ruchomej  $2 \times 4$  to  $\{1, 2, 2, 2, 1\}$ .

Symetryczne średnie ruchome posiadają własności pożądane z punktu widzenia dekompozycji szeregu czasowego – umożliwiają eliminację określonych częstości z szeregu czasowego oraz nie powodują wystąpienia efektu fazowego<sup>6</sup>. Cechy te można przeanalizować dla przykładowego szeregu czasowego  $Y_t$ , w którym występują wahania o częstotliwości  $\omega$ :

$$Y_t = R \sin(\omega t + \phi), \quad (3.5)$$

gdzie:

$R$  – amplituda szeregu  $Y_t$ ,

$\omega$  – częstotliwość,

$\phi$  – przesunięcie.

Stosując filtr średniej ruchomej otrzymujemy:

$$M(Y_t) = M(R \sin(\omega t + \phi)) = G(\omega)R \sin(\omega t + \phi + \Gamma(\omega)), \quad (3.6)$$

gdzie:

$G(\omega)$  – charakterystyka częstotliwościowa filtra<sup>7</sup> (*gain function*), wyrażona jako

$$G(\omega) = \left| \theta_0 + 2 \sum_{k=1}^r \theta_k \cos k\omega \right|, \text{ wskazująca częstości, które są zachowywane w szeregu czasowym,}$$

$\Gamma(\omega)$  – funkcja przesunięcia. Dla symetrycznego, scentrowanego filtra średniej ruchomej  $\Gamma(\omega)$  jest równa zero.

Dokładne wyeliminowanie zmian sezonowych wymaga, aby filtr usuwał z szeregu czasowego częstości poniżej pewnej wielkości granicznej (częstości sezonowej) pozostawiając pozostałe wahania niezmienione, tj.:

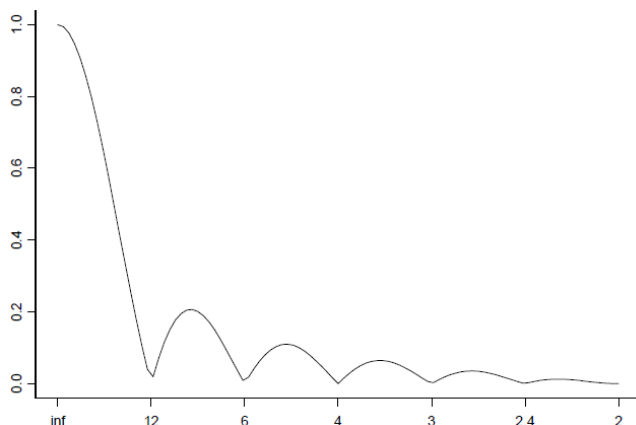
$$G(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \text{dla } \omega > \omega_0 \end{cases}. \quad (3.7)$$

---

<sup>6</sup> Efekt fazowy polega na występowaniu przesunięcia punktów zwrotnych trendu w sezonowo wyrównanym szeregu czasowym w stosunku do danych oryginalnych. Ze względu na znaczenie punktów zwrotnych trendu w prognozowaniu szeregów czasowych, efekt fazowy jest zjawiskiem niepożądanym.

<sup>7</sup> Nazwa charakterystyka częstotliwościowa filtra stanowi tłumaczenie z języka angielskiego „gain function”. Przykładowo [Grudkowska 2007] używa pojęcia „funkcja zysku”. Wskazuje ona jakie cykle, o jakiej długości, są pozostawiane w szeregu czasowym dzięki zastosowaniu danego filtra, w tym przypadku średniej ruchomej. Innymi słowy funkcja ta przedstawia to, co „zyskujemy”, co wyodrębniamy, dzięki usunięciu części informacji w wyniku zastosowania danej operacji na szeregu czasowym.

**Rysunek 3.1.1. Charakterystyka częstotliwościowa filtra 2 x 12**



Źródło: [An Introductory... 2005].

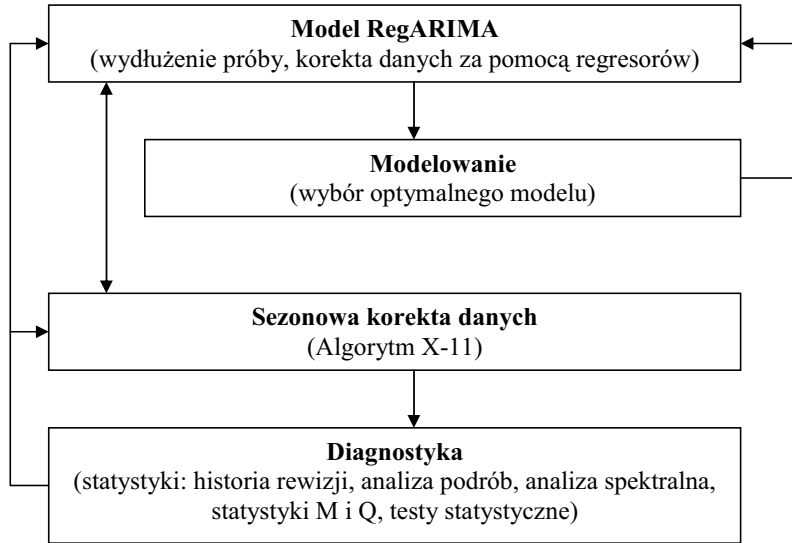
Dla filtrów średniej ruchomej własność ta jest daleka od oczekiwań teoretycznych. Przykładowo, charakterystyka częstotliwościowa filtra  $2 \times 12$  przedstawiona na rysunku 3.1.1 pokazuje, że przy jego pomocy usuwamy z szeregu czasowego częstości sezonowe (czyli  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ ), ale jednocześnie zmniejszamy amplitudę wahań pozostałych częstości, co jest zjawiskiem niepożądanym.

Oznacza to, że w dziedzinie częstości filtry średnich ruchomych nie sprawdzają się w roli narzędzia do sezonowej korekty danych, natomiast pozwalają na otrzymywanie wygładzonego szeregu czasowego w dziedzinie czasu. Z tego powodu w metodzie X-12-ARIMA dekompozycja szeregu czasowego jest wykonywana w dziedzinie czasu<sup>8</sup>.

Metoda X-12-ARIMA składa się z dwóch etapów: RegARIMA, którego celem jest linearyzacja szeregu czasowego, oraz X-11, dokonującego dekompozycji szeregu czasowego za pomocą odpowiednio dobranych średnich ruchomych, które służą do oszacowania trendu-cyklu i komponentu sezonowego. Algorytm ten, uzupełniony o diagnostykę modelu, przedstawiono na rysunku 3.1.2.

<sup>8</sup> Podział szeregu czasowego na składowe w dziedzinie częstości jest wykonywany w algorytmie TRAMO/SEATS, omówionym w dalszej części pracy.

**Rysunek 3.1.2. Schemat sezonowej korekty danych metodą X-12-ARIMA**



Źródło: [Findley i inni 1998].

### 3.2.1. Model RegARIMA

Ogólny model regresji szacowany na etapie RegARIMA ma postać [Findley i inni 1998]:

$$Y_t = \sum_i \beta_i X_{i,t} + Z_t, \quad (3.8)$$

gdzie:

$Y_t$  – oryginalny szereg czasowy,

$\beta_i$  – parametr przy  $i$ -tej zmiennej objaśniającej,

$X_{i,t}$  –  $i$ -ta zmienna objaśniająca,

$Z_t$  – reszta z modelu, estymowana za pomocą modelu SARIMA(p,d,q)(P,D,Q) w postaci:

$$\phi(B)\Phi(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D Z_t = \theta(B)\Theta(B^S)\varepsilon_t, \quad (3.9)$$

gdzie:

oznaczenia jak w rozdziale 2.1.

Po podstawieniu wzoru (3.9) do (3.8) równanie przyjmuje postać:

$$\phi(B)\Phi(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D\left(Y_t - \sum_i \beta_i X_{i,t}\right) = \theta(B)\Theta(B^S)\varepsilon_t, \quad (3.10)$$

i może być traktowane jako uogólnienie modelu SARIMA (wzór 2.17).

Na etapie RegARIMA określany jest typ zależności występujący pomiędzy komponentami szeregu czasowego. Najczęściej rozważa się model addytywny i multiplikatywny<sup>9</sup>.

### Model addytywny

Model addytywny w stosowanych metodach zakłada, że wartość szeregu czasowego jest sumą jego składowych, a więc może być zapisana jako:

$$Y_t = TC_t + S_t + I_t + D_t + E_t, \quad (3.11)$$

gdzie:

$t$  – numer obserwacji,  $t=1, \dots, T$ ,

$TC_t$  – składnik obrazujący łącznie trend i cykl w okresie  $t$ ,

$S_t$  – wahania sezonowe w okresie  $t$ ,

$I_t$  – wahania nieregularne w okresie  $t$ ,

$D_t$  – efekty kalendarzowe w okresie  $t$ ,

$E_t$  – efekt Wielkanocy w okresie  $t$ ,

### Model multiplikatywny

Model multiplikatywny, charakteryzuje się tym, że wahania cykliczne, sezonowe i nieregularne można opisać jako względne odchylenia wartości zmiennej od jej wartości wynikającej z trendu za pomocą równania:

$$Y_t = TC_t \times S_t \times I_t \times D_t \times E_t, \quad (3.12)$$

gdzie oznaczenia jak w 3.11.

Rzadziej stosowane są:

- Model log-addytywny, w którym składniki szeregu czasowego są powiązane zależnością:

$$\ln(Y_t) = \ln(TC_t + S_t + I_t + D_t + E_t). \quad (3.13)$$

- Model pseudo-addytywny:

$$Y_t = TC_t (S_t + I_t + D_t + E_t - 1). \quad (3.14)$$

przeznaczony dla szeregów czasowych, w których występują wartości zerowe.

<sup>9</sup> Równania poszczególnych modeli zostały zaczerpnięte z [Ladiray, Quenneville 2001].

Z uwagi na to, że dla większości ekonomicznych szeregów czasowych amplituda wahań sezonowych jest proporcjonalna do poziomu tego szeregu, najczęściej stosowany jest model multiplikatywny lub log-addytywny. Dla trendostacjonarnych szeregów czasowych najbardziej właściwą opcją jest model multiplikatywny, natomiast dla szeregów przyrostostacjonarnych preferowany jest model log-addytywny [ESS Guidelines ..., 2009].

Do regresorów estymowanych przez RegARIMA zalicza się: stałą, odpowiadającą parametrowi  $\phi_0$  w równaniu 2.17, obserwacje nietypowe, sezonowe zmienne zerojedynkowe oraz efekty kalendarzowe.

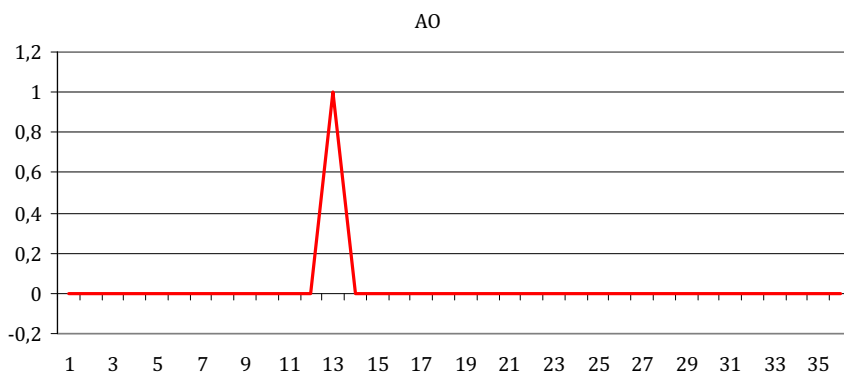
Wśród wymienianych w literaturze przedmiotu obserwacji nietypowych znajdują się zdarzenia jednorazowe, permanentne (skokowe), przejściowe, rozłożone w czasie mające niesezonowy charakter i związane z efektami sezonowymi<sup>10</sup>. Poniżej przedstawimy ich istotę.

### Zdarzenia jednorazowe

Zdarzenie jednorazowe, które zaszło w okresie  $t_0$  jest oznaczane jako *AO* (*Additive outlier*) i modelowane za pomocą zmiennej:

$$AO_t^{t_0} = \begin{cases} 1 & \text{dla } t = t_0 \\ 0 & \text{dla } t \neq t_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Rysunek 3.2.1. Regresor typu AO



Źródło: opracowanie własne.

<sup>10</sup> Definicja obserwacji nietypowych AO, LS, TC i RP przedstawionych w dalszej części pochodzi z [X-12-ARIMA... 2007].

Regresor ten jest używany do modelowania wpływu na szereg jednorazowego impulsu. Przykładem zdarzenia tego typu są anomalie pogodowe czy strajki.

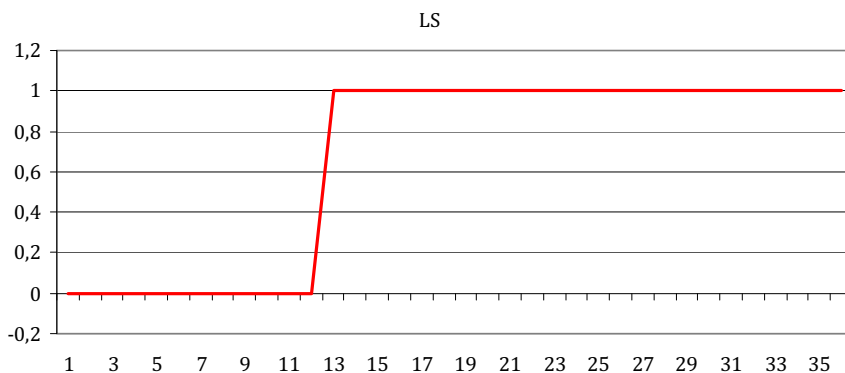
### Zmiany permanentne, skokowe

Permanentna, skokowa zmiana poziomu szeregu czasowego (*Level shift* – *LS*), która miała miejsce w okresie  $t_0$ , szacowana jest przy użyciu zmiennej:

$$LS_t^{t_0} = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_0 \\ 1 & \text{dla } t \geq t_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Przykładem zdarzenia tego typu jest zmiana wymiaru podatku czy wprowadzenie ceł. Efekt takich zmian poziomu zjawiska jest przedstawiony schematycznie na rysunku 3.2.2.

Rysunek 3.2.2. Regresor typu LS



Źródło: opracowanie własne.

### Zmiany przejściowe

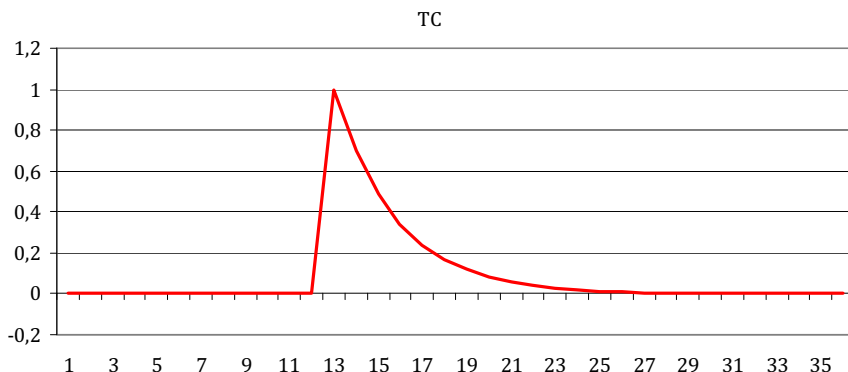
Przejściowa zmiana poziomu szeregu czasowego (*Temporary change*  $TC^{11}$ ) to taka, która została zainicjowana w okresie  $t_0$  i zanikała w tempie określonym przez współczynnik  $\alpha$ . Jest ona modelowana za pomocą równania:

$$TC_t^{t_0} = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_0 \\ \alpha^{t-t_0} & \text{dla } t \geq t_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

<sup>11</sup> Ogólnie w niniejszym opracowaniu nazwa TC jest stosowana do określenia długookresowego trendu. W tym momencie wyjątkowo za jej pomocą oznaczamy przejściową zmianę szeregu czasowego, z uwagi na przyjęte w metodologii X-12-ARIMA oznaczenia.



**Rysunek 3.2.3. Regresor typu TC**



Źródło: opracowanie własne.

Zmienna typu  $TC$  jest używana do modelowania zdarzeń, których siła wpływu na szereg czasowy maleje w czasie. Może być to przykładowo efekt ekstremalnych stanów pogodowych utrzymujących się przez kilka okresów (susze, powodzie).

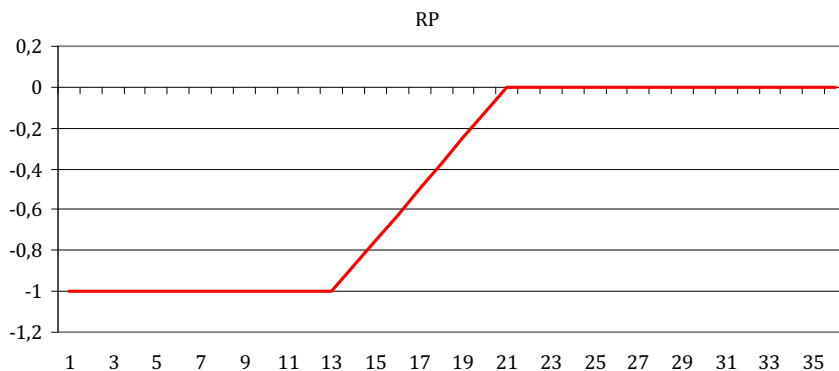
### Zmiany permanentne rozłożone w czasie

Permanentna, rozłożona w czasie, zmiana poziomu szeregu czasowego (*Ramp effect* –  $RP$ ), która została zainicjowana w okresie  $t_0$  i zakończona w okresie  $t_1$  wyraża się za pomocą zmiennej:

$$RP_t^{(t_0, t_1)} = \begin{cases} -1 & \text{dla } t \leq t_0 \\ (t - t_0)/(t_1 - t_0) - 1 & \text{dla } t_0 \leq t < t_1 \\ 0 & \text{dla } t \geq t_1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Regresor tego typu jest używany do opisu takich samych zjawisk jak LS. W odróżnieniu od LS zakłada on występowanie okresu dostosowawczego do nowych warunków ekonomicznych.

**Rysunek 3.2.4. Regresor typu RP**

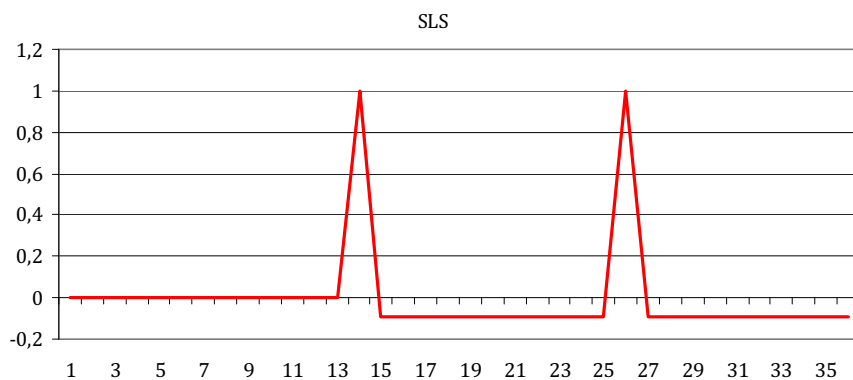


Źródło: opracowanie własne.

### Zmiany sezonowe permanentne

Sezonowe permanentne zmiany poziomu szeregu czasowego (*Seasonal level shift* – SLS), które od punktu  $t_0$  wpływają na dany sezon szeregu czasowego. Przykładem sytuacji, w której zmienna typu SLS znajduje zastosowanie, jest wprowadzenie od okresu  $t_0$  rocznych premii wypłacanych pracownikom w grudniu każdego roku.

**Rysunek 3.2.5. Regresor typu SLS**



Źródło: opracowanie własne.

Zmiany typu SLS modelowane są za pomocą zmiennej<sup>12</sup>:

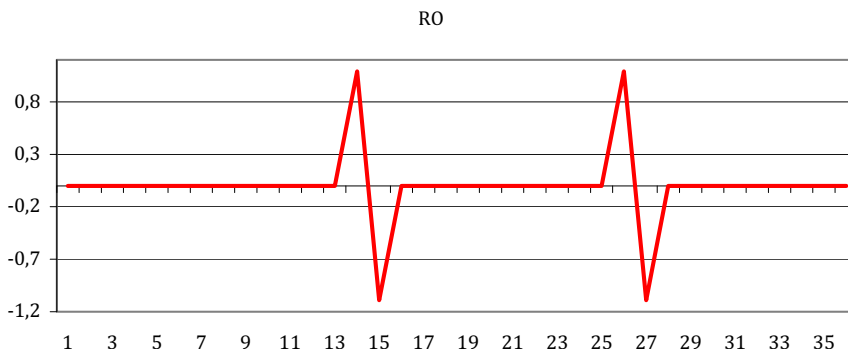
$$SLS_t^{t_0} = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_0 \\ 1 & \text{dla } t \geq t_0, \text{ gdzie } t = t_0 + ks, k = \{1, 2, \dots, n\}, s - \text{liczba okresów w roku} \\ \frac{-1}{(s-1)}, & \text{w p.p.} \end{cases} \quad (3.19)$$

## Realokacje

Realokacje (*Reallocation outlier* – RO), dla których wpływ regresora na obserwacje z sąsiadujących okresów jest przeciwstawny i równy co do wartości bezwzględnej [Wu i inni 1993]. Oscylacje są modelowane jako suma dwóch zmiennych typu AO.

Tego typu regresory są wykorzystywane do modelowania zmian wzorca sezonowego zachodzących w okresie objętym próbą (np. przesunięcie wypłat nagród rocznych z grudnia na styczeń).

**Rysunek 3.2.6. Regresor typu RO**



Źródło: opracowanie własne.

W przypadku niektórych szeregów czasowych obserwuje się zależność pomiędzy wartością obserwacji a liczbą dni wolnych od pracy przypadających na dany okres. Nosi ona nazwę efektu kalendarzowego i wynika z różnic w liczbie i układzie dni wolnych od pracy w poszczególnych okresach w kolejnych latach oraz z występowania roku przestępnego i świąt ruchomych. Obecność efektu kalendarzowego zaburza szacowanie czynników sezonowych, gdyż efekt ten ma charakter stochastyczny, a nie deterministyczny. Z tego

<sup>12</sup> Definicja SLS pochodzi z pracy [Kaiser, Maravall 2002].

względu jest on estymowany i usuwany z szeregu czasowego przed zasadniczą procedurą sezonowej korekty danych. Do szeregów czasowych, na które efekt kalendarzowy ma zwykle wpływ należy wielkość produkcji przemysłowej i sprzedaży detalicznej. Metoda X-12-ARIMA umożliwia oszacowanie kilku rodzajów efektów kalendarzowych [Findley i inni 1998], których opis przedstawiamy poniżej.

### **Efekt dnia roboczego**

Efekt dnia roboczego (tzw. *Working Days effect*), oznacza występowanie zależności wartości szeregu czasowego od liczby dni roboczych i wolnych od pracy. Przykładowy rozkład tych wartości dla stycznia w kolejnych latach przedstawia tabela 3.2.1.

Efekt dnia roboczego jest modelowany za pomocą zmiennej wskazującej na wielkość odchylenia liczby dni roboczych od średniej liczby dni roboczych w danym sezonie w stosunku do relacji wzorcowej. Wspomniany wzorzec zakłada, że proporcja dni roboczych do dni wolnych od pracy w danym okresie jest taka jak w typowym tygodniu, zawierającym pięć dni roboczych i dwa dni wolne od pracy.

$$WD_t = D_{i_{WD},t} - \frac{5}{2} D_{i_H,t} , \quad (3.20)$$

gdzie:

$t$  – numer okresu,

$D_{i,t}$  – liczba wystąpień  $i$ -tego dnia tygodnia w  $t$ -tym okresie,

$i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  – numer dnia tygodnia, taki, że  $1 = Pon$ ,  $2 = Wt$ , ...,

$i_{WD}$  – dzień roboczy, tj.  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,

$i_H$  – dzień wolny od pracy, tj.  $i \in \{6, 7\}$ .

Zmienna  $WD_t$  przyjmuje wartość zero dla okresów, w których proporcja dni roboczych i wolnych od pracy odpowiada rozkładowi tych dni w typowym tygodniu, tzn. na każde 5 dni roboczych przypadają dwa dni wolne od pracy.  $WD_t > 0$  wskazuje na okres, w którym liczba dni roboczych jest wyższa od typowej wartości, a  $WD_t < 0$  to okres, dla którego proporcja liczby dni świątecznych do ogólnej liczby dni w okresie jest wyższa niż ta proporcja obliczona dla wzorcowego tygodnia.

**Tabela 3.2.1. Liczba dni roboczych i wolnych od pracy w styczniu w latach 2008-2011**

Wyszczególnienie	2011	2010	2009	2008
Dni robocze	21	21	22	23
Dni wolne od pracy	10	10	9	8

Źródło: opracowanie własne.

Powyższy regresor znajduje zastosowanie dla szeregów czasowych, dla których poziom aktywności ekonomicznej dla każdego dnia roboczego jest w przybliżeniu taki sam i różni się on istotnie od poziomu obserwowanego w dni wolne od pracy.

### Efekt dni tygodnia

Efekt dni tygodnia (tzw. *Trading Day effect*) mierzy wpływ liczby każdego z dni tygodnia na wartość szeregu czasowego. Znajduje on zastosowanie dla kategorii, dla których występuje zróżnicowanie pomiędzy poziomem aktywności ekonomicznej w kolejnych dniach, np. „efekt poniedziałku” lub „efekt piątku”. Zróżnicowanie liczby dni tygodnia w kolejnych latach dla wybranego okresu przedstawia tabela 3.2.2.

**Tabela 3.2.2. Liczba dni tygodnia w styczniu w wybranych latach**

Dzień tygodnia	2011	2010	2009	2008
Poniedziałek	5	4	4	4
Wtorek	4	4	4	5
Środa	4	4	4	5
Czwartek	4	4	5	5
Piątek	4	5	5	4
Sobota	5	5	5	4
Niedziela	5	5	4	4

Źródło: opracowanie własne.

Efekt dni tygodnia jest modelowany przez sześć zmiennych  $T_{i,t}$ , dla których sprawdzana jest łączna istotność oszacowanych parametrów regresji:

$$TD_t = D_{i,t} - D_{7,t}, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.21)$$

gdzie:

$D_{i,t}$  – liczba wystąpień  $i$ -tego dnia tygodnia w  $t$ -tym okresie.

## Długość okresu

Długość okresu (tzw. *Length-of-Month effect*) wskazuje na odchylenie liczby dni przypadających na dany okres od długoookresowej średniej. Efekt ten jest modelowany za pomocą zmiennej<sup>13</sup>:

$$Length_t = m_t - \bar{m}_t \quad (3.22)$$

gdzie:

$m_t$  – długość okresu w dniach,

$\bar{m}_t$  – średnia długość okresu, dla danych miesięcznych  $\bar{m}_t = 30,4375$ .

## Efekt roku przestępnego

Efekt roku przestępnego (tzw. *Leap Year effect*) umożliwia pomiar wpływu dodatkowego dnia w roku na wartość szeregu czasowego za pomocą zmiennej:

$$Leap_t = \begin{cases} 0,75, & \text{gd}y\ i = 2, l = leap \\ -0,25, & \text{gd}y\ i \neq 2, l = leap \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}, \quad (3.23)$$

gdzie:

$i = \{1, 2, \dots, 12\}$  – podokresy w roku,

$t$  – numer okresu,

$l$  – rok przestępny.

## Efekt Świąt Wielkanocy

Efekt Świąt Wielkanocy (tzw. *Easter Effect*) wskazuje na zmianę aktywności ekonomicznej podmiotów gospodarczych w dniach poprzedzających to święto. W zależności od przyjętego czasu trwania tego efektu, może on każdego roku wpływać na wartości szeregu czasowego wyłącznie w jednym lub dwóch spośród trzech miesięcy: lutym, marcu i kwietniu:

$$E(w, t) = \begin{cases} \frac{n_t}{w} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}, \quad (3.24)$$

gdzie:

$w$  – czas trwania efektu Świąt Wielkanocy, liczony w dniach,  $1 \leq w \leq 25$ ,

---

<sup>13</sup> Definicja stosowana do danych o częstotliwości miesięcznej. W przypadku częstotliwości kwartalnej definicja zmiennej podlega odpowiednim modyfikacjom.

$n_{i,t}$  – liczba dni w  $t$ -tym okresie, należących do przedziału  $w$ .

pozostałe oznaczenia jak wyżej.

Należy podkreślić, że zmienność rozkładu dni tygodnia jest mniejsza w kwartałach niż w miesiącach, gdyż w drugim kwartale każdego roku wszystkie dni tygodnia występują dokładnie 13 razy [Guideline to... 2007]. Ponadto efekt roku przestępnego ma wpływ tylko na pierwszy kwartał. Z tego względu efekty kalendarzowe mają znacznie słabszy wpływ na szeregi o częstotliwości kwartalnej niż miesięcznej.

Wymienione powyżej regresory są standardowo zaimplementowane w pakietach statystycznych przeznaczonych do sezonowej korekty danych i mogą być automatycznie uwzględniane w modelu (3.10). Ponadto z reguły możliwe jest dodawanie do modelu regresji innych zmiennych zdefiniowanych przez użytkownika.

### Ustalanie postaci modelu

Proces ustalania ostatecznej postaci modelu (3.10) jest wielostopniowy<sup>14</sup>. W pierwszej fazie procedury do szeregu czasowego dobierany jest model SARIMA (0,1,1)(0,1,1)<sub>s</sub>, który jest używany do testowania istotności efektów kalendarzowych i innych regresorów należących do wektora  $X_{i,t}$ , z wyjątkiem wykrywanych automatycznie obserwacji nietypowych. Istotność tych zmiennych jest weryfikowana przy pomocy zmodyfikowanego kryterium informacyjnego Akaike'a (AICC)<sup>15</sup>. Istotność stałej w modelu (2.17) jest sprawdzana statystyką testu t-Studenta. W kolejnym kroku ma miejsce automatyczna identyfikacja obserwacji nietypowych, po której następuje powtórna weryfikacja istotności efektów kalendarzowych i stałej. W ostatniej fazie wykonywana jest diagnostyka reszt modelu (test Ljung-Boxa na resztach i odchylenie standardowe reszt) i usunięcie z szeregu zaburzeń modelowanych przez zidentyfikowane regresory.

Celem drugiego kroku algorytmu jest identyfikacja rzędów różnicowania docelowego modelu ARIMA, tj. ustalenie wartości parametrów  $d$  i  $D$ . Odbywa

---

<sup>14</sup> Opis procedury na podstawie *X-12-ARIMA Reference Manual*. Opisany algorytm bazuje na procedurze stosowanej przez program TRAMO. Dla X-12-ARIMA możliwe jest również stosowanie innych metod ustalania postaci modelu autoregresyjnego.

<sup>15</sup> Statystyka zmodyfikowanego kryterium informacyjnego Akaike ma postać:

$$AICC_N = -2L_N + 2n_p \left( 1 - \frac{n_p + 1}{N} \right)^{-1}, \text{ gdzie: } N - \text{liczba obserwacji, } n_p - \text{liczba parametrów}$$

modelu,  $L_N$  – logarytm funkcji wiarygodności modelu.

się ona przy użyciu metody Hannana-Rissanena<sup>16</sup>. Po ich ustaleniu w modelu uwzględniana jest stała równa średniej ze zróżnicowanego szeregu czasowego i sprawdzana jest jej istotność.

Kolejnym etapem jest identyfikacja parametrów sezonowej części modelu SARIMA, tj.  $P$  i  $Q$ , dla zróżnicowanego szeregu czasowego. Odbywa się ona poprzez porównanie wartości kryterium informacyjnego Schwarza-Bayesa (BIC)<sup>17</sup> dla różnych specyfikacji modelu SARIMA postaci  $(3, d, 0)(P, D, Q)$ . Preferowany jest model o najniższej wartości kryterium informacyjnego. Następnie na podstawie statystyki BIC ustalane są wartości parametrów  $p$  oraz  $q$  w modelu  $(p, d, q)(P, D, Q)$ , gdzie wartości  $P$  i  $Q$  zostały wyliczone w poprzednim kroku. Następnie przeprowadzany jest ponowny dobór parametrów  $P$  i  $Q$  za pomocą kryterium BIC [X-12-ARIMA ... 2011].

W czwartym etapie procedury następuje porównanie modelu ustalonego w poprzednim kroku z modelem domyślnym  $(0, 1, 1)(0, 1, 1)_s$  i wybór jednego z nich<sup>18</sup>. Dla ostatecznego modelu przeprowadzana jest weryfikacja poprawności jego budowy, w tym sprawdzenie istotności parametrów modelu ARIMA i regresorów.

Wybrany w procedurze RegARIMA model jest wykorzystywany do wydłużenia próby na obu końcach (*forecast* i *backcast*). Otrzymywane na podstawie bieżących i przeszłych obserwacji szeregu liniowe prognozy  $Y_t$  minimalizują błąd średniokwadratowy (MMSE – *Minimum Mean Square Error*), przy założeniu poprawności budowy modelu ARIMA i doboru regresorów. Przy ich wyliczaniu przyjmuje się, że w okresie objętym prognozą nie wystąpią obserwacje nietypowe. Użycie wartości prognozowanych umożliwi zastosowanie przez algorytm X-11 symetrycznych filtrów dla wszystkich rzeczywistych obserwacji w próbie [X-12-ARIMA ... 2011].

---

<sup>16</sup> Metoda Hannana-Rissanena to dwustopniowa procedura doboru rzędów procesu autoregresyjnego i procesu średniej ruchomej w modelu AIRMA. Szczegółowy opis można znaleźć w (2007): *X-12-ARIMA Reference Manual*.

<sup>17</sup> Statystyka kryterium informacyjnego Schwarza-Bayesa ma postać:  $BIC_N = -2L_N + n_p \log N$ , gdzie:  $N$  – liczba obserwacji,  $n_p$  – liczba parametrów modelu,  $L_N$  – logarytm funkcji wiarygodności modelu.

<sup>18</sup> Kryteria wyboru modelu zostały opisane w [X-12-ARIMA... 2007].



### 3.2.2. Algorytm X-11

Algorytm X-11 posiada charakter iteracyjny. Składa się on z dwóch etapów o podobnej strukturze. W ramach każdego etapu wykonywane są kolejne kroki, z których każdy korzysta z wyników uzyskanych w kroku poprzednim<sup>19</sup>. Poniższy opis dotyczy modelu addytywnego, inne modele wymagają wcześniejszego zastosowania odpowiednich przekształceń do postaci addytywnej<sup>20</sup>.

W pierwszej części algorytmu<sup>21</sup> następuje wstępna estymacja komponentu trend-cykl poprzez zastosowanie scentrowanej średniej ruchomej rzędu 12:

$$TC_t^{(1)} = M_{2 \times 12}(Z_t), \quad (3.25)$$

gdzie:

$TC_t$  – trend-cykl,

<sup>(1)</sup> – numer iteracji,

$Z_t$  – zlinearyzowany szereg czasowy z równania (3.9).

Jak wynika z wykresu 3.1. filtr ten usuwa wahania sezonowe, pojawiające się z częstotliwością raz, dwa, trzy, cztery, pięć i sześć razy do roku. Filtr w niewielkim stopniu oddziałuje na wahania długookresowe i jednocześnie redukuje amplitudę wahań o wysokiej częstotliwości odpowiadających składnikowi nieregularnemu.

Suma komponentu sezonowego i nieregularnego (*Seasonal-Irregular* ( $SI$ )) jest wyliczana w sposób rezydualny:

$$(S_t + I_t)^{(1)} = Z_t - TC_t^{(1)}, \quad (3.26)$$

gdzie:

$S_t$  – składnik sezonowy,

$I_t$  – składnik nieregularny,

pozostałe oznaczenia jak wyżej.

Rozdzielenie składnika sezonowego i nieregularnego jest wykonywane poprzez zastosowanie wobec składnika  $SI$  średniej ruchomej  $3 \times 3$ , w wyniku czego następuje jego wygładzenie, stanowiące wstępną estymację czynnika sezonowego:

<sup>19</sup> Opis algorytmu X-11 na podstawie [Ladiray, Quenneville 2001].

<sup>20</sup> Przykładowo, dla modelu multiplikatywnego właściwą operacją jest logarytmowanie.

<sup>21</sup> Do oznaczenia komponentów szacowanych w pierwszej i drugiej części algorytmu używane są skrypty odpowiednio (1) oraz (2).

$$S_t^{(1)} = M_{3 \times 3}[(S_t + I_t)^{(1)}]. \quad (3.27)$$

W kolejnym kroku czynnik sezonowy poddawany jest normalizacji, tak aby suma składników sezonowych w obrębie jednego roku była w przybliżeniu równa zero<sup>22</sup>.

$$\tilde{S}_t^{(1)} = S_t^{(1)} - M_{2 \times 12}(S_t^{(1)}). \quad (3.28)$$

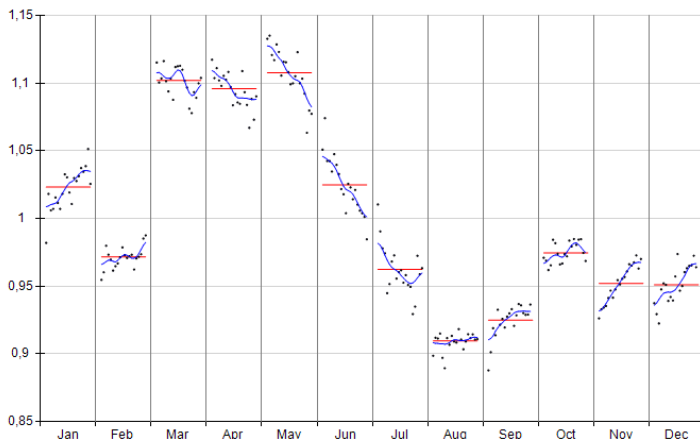
Wstępna estymacja czynnika nieregularnego  $I$  powstaje przez odjęcie od  $SI$  znormalizowanego komponentu sezonowego. W następnym kroku czynnik nieregularny jest korygowany o wartości odstające. W tym celu dla każdego 5-letniego przedziału czasowego obliczane jest odchylenie standardowe, którego wartość jest następnie przypisywana do roku znajdującego się w centrum danego 5-letniego przedziału. Kolejne wartości komponentu nieregularnego, należące do centralnego roku w 5-letnim przedziale, które są większe niż 2,5 odchylenia standardowego są oznaczane jako odstające i przyporządkowywana jest im waga równa zero. Wartościom, które należą do przedziału  $(1,5\delta; 2,5\delta)$ , gdzie  $\delta$  jest odchyleniem standardowym, przypisywana jest waga z przedziału  $(0;1)$ <sup>23</sup>. Następnie dokonywana jest powtórna estymacja odchylenia standardowego z uwzględnieniem nadanych wag [X-12-ARIMA... 2011].

Rysunek 3.2.7 obrazuje zależności pomiędzy skorygowanymi o obserwacje odstające wskaźnikami SI (kropki) a czynnikiem sezonowym otrzymanym ze wzoru 3.28 (niebieska linia). Dla celów analitycznych dane przedstawione są w podziale na okresy roku kalendarzowego, zaś widoczne tendencje obrazują, jak zmienia się wzorzec wahań sezonowych w czasie, w poszczególnych sezonach. Na rysunku zaznaczono również średnią wartość czynnika sezonowego w każdym okresie.

<sup>22</sup> Filtr  $2 \times 12$ , podobnie jak filtr  $3 \times 3$  zachowuje trend. Normalizacja wykonana za pomocą filtru polega na usunięciu trendu ze składnika sezonowego. W przypadku modelu multiplikatywnego suma składników sezonowych w obrębie jednego roku jest równa liczbie okresów w roku (12 dla danych o częstotliwości miesięcznej, 4 dla danych o częstotliwości kwartalnej).

<sup>23</sup> Waga ta jest wprost proporcjonalna do wartości czynnika nieregularnego. Jeżeli wartość komponentu nieregularnego jest niższa niż  $1,5\delta$ , to przypisywana jest pełna waga równa 1.

**Rysunek 3.2.7. Przykładowe wskaźniki SI i czynnik sezonowy**



Oznaczenia: czarny – wskaźnik SI, niebieski – czynnik sezonowy w danym okresie, czerwony – średnia wartość czynnika sezonowego dla danego okresu.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Dane wyrównane sezonowo oznaczone symbolem  $A$  są obliczane jako różnica szeregu wejściowego i znormalizowanego składnika sezonowego danym okresie:

$$A_t^{(1)} = (TC_t + I_t)^{(1)} = Z_t - \tilde{S}_t^{(1)}. \quad (3.29)$$

Druga iteracja rozpoczyna się od powtórnej estymacji trendu-cyklu przy wykorzystaniu filtra Hendersona<sup>24</sup> i sezonowo skorygowanego szeregu czasowego uzyskanego w poprzednim kroku:

$$TC_t^{(2)} = H_{13}(A_t^{(1)}). \quad (3.30)$$

<sup>24</sup> Filtr Hendersona to filtr średniej ruchomej służący do ekstrakcji trendu-cyklu z szeregu czasowego. Filtr ten zachowuje wielomiany kwadratowe i minimalizuje sumę kwadratów trzecich różnic szeregu. Ze względu na te dwie cechy zastosowanie filtra Hendersona prowadzi do otrzymania wygładzonego trendu, w którym zachowane są jego zmiany w krótkim okresie. W celu wyliczenia finalnego komponentu trend-cykl algorytm X-11 stosuje filtr Hendersona na wyrównanych sezonowo danych. Rząd filtra zależy od charakterystyki danych. W przypadku szeregu czasowego o częstotliwości miesięcznej jest to filtr rzędu 9, 13 lub 23, natomiast w przypadku danych kwartalnych – stosowany jest filtr rzędu 5 lub 7. Wartości wag filtra Hendersona rzędu  $2p+1$  są obliczane z następującego wzoru:

$$\theta_i = \frac{315 [(n-1)^2 - i^2][n^2 - i^2][(n+1)^2 - i^2][3n^2 - 16 - 11i^2]}{8n(n^2 - 1)(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)} \quad \text{gdzie } n = p + 2. \text{ Więcej w [Ladiray, Quenneville 2001].}$$

Następnie obliczana jest łączna wartość składnika sezonowego i nieregularnego:

$$(S_t + I_t)^{(2)} = Z_t - TC_t^{(2)}. \quad (3.31)$$

Do szacowania czynnika sezonowego wykorzystywany jest filtr średniej ruchomej:

$$S_t^{(2)} = M_{3 \times 5}[(S_t + I_t)^{(2)}]. \quad (3.32)$$

Jest on następnie normalizowany w analogiczny sposób jak w pierwszej iteracji:

$$\tilde{S}_t^{(2)} = S_t^{(2)} - M_{2 \times 12}(S_t^{(2)}). \quad (3.33)$$

Ostatecznie, na sezonowo wyrównany szereg składają się: trend-cykl i składnik nieregularny otrzymane na drugim etapie iteracji:

$$A_t^{(2)} = (TC_t + I_t)^{(2)} = Z_t - \tilde{S}_t^{(2)}. \quad (3.34)$$

W końcowym kroku metody X-12-ARIMA następuje diagnostyka modelu. Obecność sezonowości w szeregu czasowym i jej typ jest określany na podstawie testów sezonowości, statystyk M i Q oraz analizy podprób (*sliding spans*) natomiast stopień eliminacji wahań sezonowych z szeregu czasowego jest oceniany na podstawie odpowiedniego periodogramu. Wielkość rewizji trendu i składnika sezonowego jest wyliczana przez statystykę historii rewizji (*revisions history*)<sup>25</sup>. W bardziej rozbudowanych wersjach algorytmu dobór długości filtrów zależy od charakterystyki komponentów [X-12-ARIMA... 2011].

### 3.3. Metoda TRAMO/SEATS

TRAMO/SEATS jest metodą sezonowej korekty danych, w której wyodrębnienie komponentów z szeregu czasowego dokonywane jest na podstawie odpowiednio dobranych modeli ARIMA. Podobnie jak X-12-ARIMA, TRAMO/SEATS jest metodą dwuetapową – w pierwszej fazie – TRAMO – w wyniku identyfikacji czynników deterministycznych wpływających na dany szereg czasowy następuje jego linearyzacja. W drugiej fazie – SEATS – następuje właściwa dekompozycja szeregu czasowego poprzez określenie postaci modelu ARIMA dla każdego ze składników.

---

<sup>25</sup> Testy sezonowości, periodogram, statystyki M i Q, analiza podprób oraz historia rewizji zostały omówione w rozdziale 2.4.

### 3.3.1. Algorytm TRAMO

Zasadniczymi celami programu procedury (*Time Series Regression with ARIMA Noise, Missing Observations and Outliers*) są: interpolacja szeregu czasowego zawierającego obserwacje nietypowe, estymacja modelu regresji, w którym błędy są opisywane modelem ARIMA oraz prognozowanie szeregu czasowego na podstawie oszacowanego modelu.

Algorytm TRAMO estymuje szereg czasowy  $z_t$  za pomocą następującego równania regresji [Maravall 2006]:

$$z_t = y_t \beta + x_t. \quad (3.35)$$

gdzie:

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  – wektor współczynników regresji,

$y_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt})$  – regresory opisujące wpływ na szereg czasowy czynników kalendarzowych, obserwacji nietypowych, zmiennych interwencyjnych i stałej<sup>26</sup>,

$x_t$  – czynnik podlegający procesowi ARIMA:

$$\phi(B)\delta(B)x_t = \theta(B)a_t, \quad (3.36)$$

gdzie:

$B$  – operator opóźnienia,

$\delta(B) = (1 - B)^d (1 - B^s)^D$  – wielomian operatora opóźnień zawierający pierwiastki związane z rzędem regularnego i sezonowego różnicowania szeregu czasowego,

$\phi(B) = (1 + \varphi_1 B + \dots + \varphi_p B^p)(1 + \varphi_1 B^s + \dots + \varphi_p B^{sp})$  – wielomian operatora opóźnień zawierający pierwiastki procesu autoregresyjnego,

$\theta(B) = (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_p B^q)(1 + \theta_1 B^s + \dots + \theta_q B^{sq})$  – odwracalny<sup>27</sup> proces średniej ruchomej,

$a_t$  – proces białego szumu<sup>28</sup>,  $a_t \sim N(0, V(a))$ .

---

<sup>26</sup> Stała jest równa średniej ze zróżnicowanego szeregu  $\delta(B)z_t$ . Regresory rozpatrywane przez TRAMO są zdefiniowane analogicznie jak w RegARIMA.

<sup>27</sup> Proces średniej ruchomej jest odwracalny, jeżeli wszystkie rozwiązania równania  $\phi(B) = 0$  są co do modułu większe od 1.

<sup>28</sup> Przyjęto oznaczenie procesu białego szumu zgodnie z konwencją stosowaną w literaturze przedmiotu dotyczącej metody TRAMO/SEATS. W metodzie X-12-ARIMA proces białego szumu oznaczany jest symbolem  $\varepsilon_t$ .

Procedura szacowania równania 3.35 jest niemal identyczna jak estymacja wykonywana przez RegARIMA<sup>29</sup>. Oszacowany przez TRAMO model ARIMA wraz z wyliczonymi prognozami jest wykorzystywany przez program SEATS.

### 3.3.2. Procedura SEATS

Procedura SEATS (*Signal Extraction in Arima Time Series*) polega na dekompozycji szeregu czasowego opisanego modelem ARIMA na nieobserwowalne komponenty: trend-cykl, czynnik sezonowy, komponent przejściowy i komponent nieregularny. SEATS wykorzystuje do estymacji model ARIMA wybrany przez TRAMO<sup>30</sup>. Dekompozycja może mieć postać addytywną lub multiplikatywną, przy czym postać multiplikatywna może być przekształcona do addytywnej za pomocą logarytmowania. W przypadku addytywnym szereg czasowy  $x_t$  jest przedstawiony w postaci sumy składowych<sup>31</sup>:

$$x_t = \sum_{i=1}^k x_{it}, \quad (3.37)$$

przy czym każdy  $i$ -ty komponent jest realizacją procesu ARIMA w postaci:

$$\delta_i(B)x_{it} = \psi_i(B)a_{it}, \quad (3.38)$$

gdzie:

$i$  – komponenty, odpowiednio: trend-cykl, sezonowy, przejściowy, nieregularny<sup>32</sup>,

$$\psi_i(B) = \frac{\theta_i(B)}{\varphi_i(B)},$$

$a_{it} \sim WN(0, V(a_i))$  – proces białego szumu nazywany innowacją  $i$ -tego komponentu;  $a_{it}$  jest estymatorem błędu jednookresowej prognozy  $i$ -tego komponentu.

<sup>29</sup> Linearyzacja szeregu przez RegARIMA jest wzorowana na rozwiązaniach opracowanych dla TRAMO.

<sup>30</sup> W przypadku, gdy model ARIMA wybrany przez TRAMO nie jest dekomponowalny, SEATS dokonuje ponownej identyfikacji modelu ARIMA.

<sup>31</sup> W przypadku multiplikatywnym odpowiednie równanie ma postać  $x_t = \prod_{i=1}^k x_{it}$ , które po obustronnym zlogarytmowaniu  $\left( \log(x_t) = \sum_{i=1}^k \log(x_{it}) \right)$  może być analizowane tak jak przypadek addytywny.

<sup>32</sup> Komponent nieregularny, który z definicji jest procesem białego szumu, jest zawsze przedstawiany jako ARIMA (0,0,0)(0,0,0).

W procesie estymacji zakłada się, że składowe szeregu czasowego są do siebie ortogonalne<sup>33</sup>. Warunek ten jest weryfikowany przez badanie korelacji pomiędzy komponentami otrzymanymi w wyniku estymacji oraz pomiędzy odpowiednimi estymatorami teoretycznymi. Przykładowy wynik testu korelacji przedstawia tabela 3.3.1. Korelacja jest uznawana za zaniedbywalnie małą, jeżeli poziom istotności jest większy niż założony poziom istotności równy 5%.

**Tabela 3.3.1. Przykładowy wynik testu korelacji: metoda TRAMO/SEATS**

Współczynniki korelacji	Estymator teoretyczny	Estymacja	Wartość statystyki testowej
Trend/Komponent sezonowy	-0,1206	-0,0715	0,6202
Trend/Komponent nieregularny	0,0912	0,0017	0,1738
Komp. sezonowy/Komp. nieregularny	0,0244	0,0420	0,2307

Źródło: opracowanie własne, obliczenia w pakiecie Demetra+.

Jednoznaczna identyfikacja komponentów wymaga, aby żadne dwa z nich nie zawierały tych samych pierwiastków jednostkowych procesu autoregresyjnego  $\varphi(B)$ .

Dekompozycja jest wykonywana w dziedzinie częstości i polega na podziale funkcji gęstości spektralnej szeregu  $x_t$  na funkcje gęstości spektralnej poszczególnych składowych. Do trendu-cyklu są włączane wartości skupione wokół zerowej częstości spektralnej. Komponent sezonowy tworzą wartości funkcji gęstości spektralnej znajdujące się w określonym przedziale wokół częstości sezonowych. Na składnik przejściowy składają się cykliczne fluktuacje o okresie zmian większym niż rok. Komponent nieregularny jest procesem białego szumu. Prawidłowa dekompozycja wymaga, aby każde dwa komponenty były niezależne od siebie. Zgodność wyników z tym założeniem jest weryfikowana odpowiednim testem.

Liczba dekompozycji spełniająca powyższe założenie jest nieskończona. Z tego względu w procesie estymacji wariancja komponentu nieregularnego jest maksymalizowana, tak więc niemożliwe jest wyodrębnienie procesu białego szumu z pozostałych komponentów<sup>34</sup>.

<sup>33</sup> Założenie to oznacza, że za zachowanie poszczególnych komponentów odpowiadają różne, niezależne od siebie przyczyny. Przykładowo, czynniki sezonowe i kalendarzowe powodują powstawanie składnika sezonowego, podczas gdy trend-cykl jest wynikiem m.in. określonego sposobu produkcji, wybranej technologii i bodźców makroekonomicznych. Założenie o ortogonalności umożliwia jednoznaczne przyporządkowanie konkretnych częstości wejściowego szeregu do jednego z komponentów i późniejszą niezależną analizę przebiegu każdego składnika.

<sup>34</sup> Jest to tak zwana dekompozycja kanoniczna, zakładająca, że oprócz składnika nieregularnego, żaden z komponentów szeregu czasowego nie zawiera procesu białego szumu.

Z własności modelu stosowanego przez SEATS wynika, że estymator teoretyczny danego komponentu cechuje się niższą wariancją niż ten komponent [Maravall 1993]. Ponadto, wariancja estymatora teoretycznego powinna być zbliżona do wariancji komponentu otrzymanego wyniku estymacji. Jeżeli dla danego komponentu jest istotnie większa, oznacza to, że w procesie estymacji doszło do przeszacowania tego komponentu. Odwrotna zależność jest znakiem niedoszacowania komponentu [Grudkowska 2011]. Przykładowy wynik powyższego testu przedstawia tabela 3.3.2. Analiza zamieszczonych wyników wskazuje, że komponent sezonowy jest przeszacowany, gdyż wariancja estymatora teoretycznego jest mniejsza niż wyestymowanego, a wartość statystyki testowej jest niższa niż założona wartość graniczna, wynosząca 5%.

**Tabela 3.3.2. Przykładowy wynik analizy wariancji komponentów i ich estymatorów metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Komponent	Estymator teoretyczny	Estymacja	Wartość statystyki testowej
Trend	0,0040	0,0001	0,0001	0,4707
Szereg skorygowany	0,5222	0,1065	0,0821	0,1440
Komponent sezonowy	0,9007	0,5951	1,3103	0,0000
Komponent nieregularny	0,0863	0,0164	0,0128	0,0585

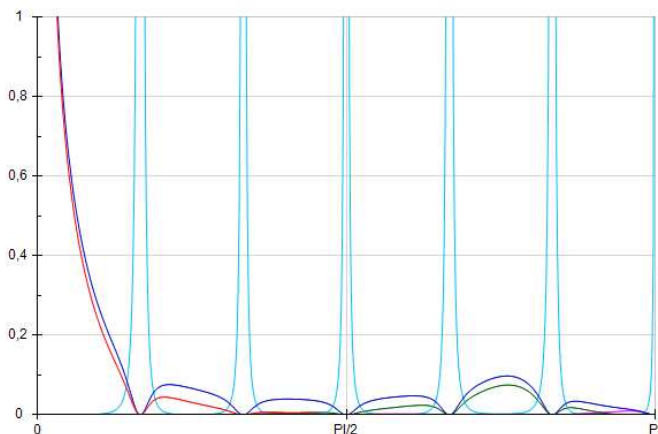
*Źródło: opracowanie własne, obliczenia w pakiecie Demetra+.*

Pomocniczym narzędziem analizy wyników są funkcje gęstości spektralnej i analizy częstotliwościowe podniesione do kwadratu. Kształty tych wykresów są determinowane przez charakterystykę szeregu i generalnie nie świadczą o tym, czy dekompozycja została wykonana prawidłowo.

Funkcje gęstości spektralnej estymatorów komponentów, zamieszczone na rysunku 3.3.1, oddają własności szeregu czasowego i jego składowych. Oś pionowa przedstawia wyrażony w procentach wkład spektrum oryginalnego szeregu czasowego do spektrum danego komponentu, a oś pozioma – częstość [Grudkowska 2011]. Oczekuje się, że spektra sezonowo wyrównanych danych (oraz trendu) nie będą zawierać częstości sezonowych (tj. dla wartości  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$  spektrum będzie równe zero). Funkcja gęstości spektralnej estymatora składnika sezonowego powinna koncentrować się wokół częstości sezonowych. Jeżeli w szeregu czasowym występują efekty kalendarzowe i wyestymowany został składnik przejściowy, to jego spektrum powinno osiągać lokalne maksimum w pobliżu częstości dni roboczych.



**Rysunek 3.3.1. Przykładowe funkcje gęstości spektralnej komponentów szeregu czasowego**

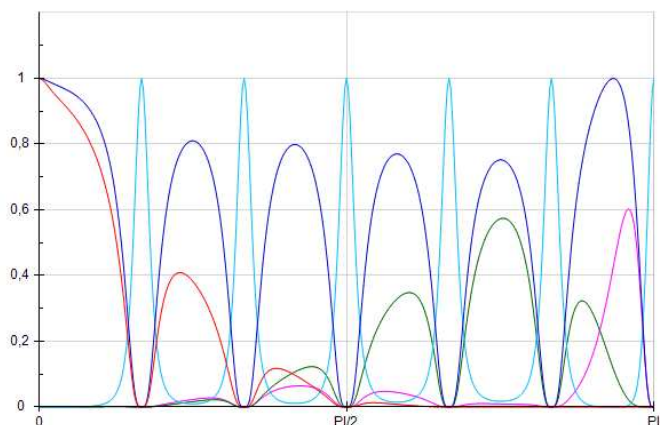


Oznaczenia: czerwony – trend, niebieski – składnik sezonowy, różowy – komponent nieregularny, zielony – czynnik przejściowy, granatowy – szereg wyrównany sezonowo.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Kwadraty charakterystyk częstotliwościowych przedstawiają wyrażony w procentach wkład zmienności oryginalnego szeregu czasowego (oś Y) do wyestymowanych składowych w zależności od częstości (oś X) [Grudkowska 2011]. Ponadto wykres wskazuje, jaka część poszczególnych częstości została zachowana w sezonowo wyrównanym szeregu czasowym. Wykres dla estymatora komponentu sezonowego powinien być skoncentrowany wokół częstości sezonowych. Należy się spodziewać, że estymator sezonowo wyrównanych danych będzie zawierał pełną zmienność z wyłączeniem częstości sezonowych, tak więc wykres odpowiedniej charakterystyki częstotliwościowej filtra (funkcji zysku) powinien zbliżać się do 1 dla wszystkich częstości z wyjątkiem częstości sezonowych. Przykładowy wykres kwadratów charakterystyk częstotliwościowych przedstawia rysunek 3.3.2.

**Rysunek 3.3.2. Przykładowe kwadraty charakterystyk częstotliwościowych dla komponentów szeregu czasowego**



Oznaczenia: czerwony – trend, niebieski – składnik sezonowy, różowy – komponent nieregularny, zielony – czynnik przejściowy, granatowy – szereg wyrównany sezonowo.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Kończącym etapem procedury TRAMO/SEATS jest ocena jakości oszacowań, w tym sprawdzenie, czy przyjęte założenia są spełnione. Do diagnostyki wyników można również wykorzystać niektóre testy statystyczne, oryginalnie dedykowane metodzie X-12-ARIMA, takie jak historia rewizji, analiza podrób i złożony test sezonowości.

### 3.4. Walidacja modelu

Diagnostyka modelu ma na celu weryfikację poprawności jego budowy, sprawdzenie występowania wahań sezonowych w szeregu czasowym oraz określenie charakterystyki tych zmian. Składają się na nią<sup>35</sup>:

- wyniki testów sezonowości,
- analiza spektralna sezonowo wyrównanych danych,
- statystyki jakości M i Q,
- analiza wskaźników SI,
- oceny wielkości rewizji,
- analiza stabilności wyników.

<sup>35</sup> Opis poszczególnych statystyk i miar jakości sezonowej korekty danych dostępny jest w pracach: [Findley i inni 1998], [Ladiray, Quenneville 2001] oraz [Gomez, Maravall 2001].

Sezonowa korekta danych nie powinna być wykonywana dla szeregów, w których nie można zidentyfikować komponentu sezonowego, gdyż prowadzi to do sztucznego wprowadzenia do danych składowych sezonowych. Istotny jest również charakter sezonowości. Zbyt szybko zmieniający się wzorzec sezonowy jest trudny do modelowania i wymaga dokładnej analizy danych. Na kompleksową ocenę wahań sezonowych składają się testy: Friedmana i Kruskala-Wallisa oraz test sezonowości ruchomej, test identyfikowalnej sezonowości oraz złożony test sezonowości.

Zgodność zależności występujących pomiędzy otrzymanymi komponentami a oczekiwaniami jest weryfikowana w metodzie X-12-ARIMA za pomocą statystyk M i Q<sup>36</sup>. Model sezonowej korekty danych powinien generować stabilne wyniki, czyli takie, które nie podlegają istotnym zmianom w miarę wydłużania szeregu czasowego o kolejne obserwacje. Ta cecha jest sprawdzana za pomocą statystyk historii rewizji (ang. *revision histories*) oraz analizy podprób (ang. *sliding spans*).

## Test Friedmana

Test Friedmana weryfikuje hipotezę zerową mówiącą o tym, że  $k$  różnych prób pochodzi z tej samej populacji lub z kilku populacji o równej średniej. Statystyka Friedmana jest wykorzystywana m.in. do testowania istotności wahań sezonowych w szeregu czasowym. Test jest wykonywany na  $j$  podpróbach ( $j = \{1, \dots, k\}$ ), gdzie  $k$  jest równe liczbie okresów w roku) pobranych z nieskorygowanych wartości komponentu SI wyliczonych w pierwszej iteracji algorytmu X-11<sup>37</sup>. Dla TRAMO/SEATS, składnik SI jest wyliczany na podstawie wartości komponentów S i I.

Hipoteza zerowa testu zakłada, że średnie dla każdej z podprób są sobie równe, tj.:  $H_0 : m_1 = m_2 = \dots = m_k$ , co przy założeniu, że wariancja każdej z prób jest stała  $i$  wynosi  $\sigma^2$ , jest równoznaczne z niewystępowaniem stabilnych wahań sezonowych.

---

<sup>36</sup> Założenia przyjęte w metodzie TRAMO/SEATS są weryfikowane za pomocą standardowej oceny współczynników korelacji pomiędzy komponentami. Ze względu na powszechną znajomość tego typu analizy, w opracowaniu pominięto jej opis.

<sup>37</sup> Wskaźnik SI jest otrzymywany jako suma (model addytywny) lub iloczyn (model multiplikatywny) komponentów S i I.

Test bazuje na dekompozycji wariancji komponentu SI na wariancję w obrębie średnich i pozostałą wariancję:

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{i,j} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{i,j} - \bar{x}_{\bullet j})^2, \quad (3.39)$$

gdzie  $\bar{x}_{\bullet j}$  jest średnią  $j$ -tej próby.

Statystyka testowa ma rozkład  $F$  :

$$F_S = \frac{\sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}_{\bullet\bullet})^2}{\frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{i,j} - \bar{x}_{\bullet j})^2}{n-k}} \sim F(k-1, n-k) \quad (3.40)$$

Brak odrzucenia hipotezy zerowej prowadzi do stwierdzenia, że badany szereg czasowy nie wykazuje wahań sezonowych.

### Test Kruskala-Wallisa

Hipoteza zerowa nieparametrycznego testu Kruskala-Wallisa jest taka sama jak testu Friedmana. Test jest wykonywany na wartościach ostatecznego oszacowania nieskorygowanego komponentu SI, który jest dzielony na  $k$  prób, gdzie  $k$  jest równe liczbie okresów w roku. Statystyka testowa ma postać:

$$W = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^k \frac{S_j^2}{n_j} - 3(n+1), \quad (3.41)$$

i rozkład  $\chi_\alpha^2$  z  $k-1$  stopniami swobody,

gdzie  $S_j$  jest sumą wartości SI zaliczonych do  $j$ -tej grupy a  $n = \sum_{j=1}^k n_j$  to liczba obserwacji.

## Test sezonowości ruchomej

Test sezonowości ruchomej opiera się na dwuczynnikowej analizie wariancji  $S^2$  komponentu SI, który jest przedstawiany w postaci sumy trzech czynników<sup>38</sup>:

$$|SI_{ij}| = b_i + m_j + e_{ij}, \quad (3.42)$$

gdzie:

$m_j$  – efekt sezonowy dla  $j$ -tego okresu,  $j = (1, \dots, k)$ , gdzie  $k = 12$  dla danych miesięcznych i  $k = 4$  dla szeregów kwartalnych,

$b_j$  – efekt roku  $i$ , ( $i = 1, \dots, N$ ), gdzie  $N$  jest liczbą pełnych lat w SI,

$e_{ij}$  – błąd.

Całkowita wariancja jest rozdzielana na zmienność wynikającą z przynależności obserwacji do różnych sezonów w roku (miesiące lub kwartały), zmienność związaną z przynależnością obserwacji do różnych lat i zmienność wewnątrzgrupową (błąd):

$$S^2 = S_b^2 + S_m^2 + S_e^2, \quad (3.43)$$

gdzie:

$$S^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{..})^2 - \text{całkowita suma kwadratów,}$$

$$S_b^2 = k \sum_{i=1}^N (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{..})^2 - \text{suma kwadratów opisująca zmienność związaną z sezonami,}$$

$$S_m^2 = k \sum_{i=1}^N (\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{..})^2 - \text{suma kwadratów opisująca zmienność związaną z latami,}$$

$$S_e^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot j} + \bar{X}_{..})^2 - \text{resztowa (wewnątrzgrupowa) suma kwadratów reszt.}$$

Hipoteza zerowa testu zakłada, że dla wszystkich lat efekt roku jest identyczny ( $b_1 = b_2 = \dots = b_N$ ), co jest równoznaczne z tym, że wzorec sezonowy nie ewoluuje w czasie. Hipoteza ta jest weryfikowana za pomocą statystyki testowej:

---

<sup>38</sup> Wzór dla addytywnej dekompozycji szeregu czasowego. W przypadku multiplikatywnym stosuje się postać:  $|SI_{ij} - 1| = b_i + m_j + e_{ij}$ .

$$F_M = \frac{\frac{S_B^2}{(n-1)}}{\frac{S_R^2}{(n-1)(k-1)}}, \quad (3.44)$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład  $F$  z  $k-1$  i  $n-k$  stopniami swobody.

### Test identyfikowalnej sezonowości

Weryfikacja hipotezy o występowaniu w szeregu czasowym identyfikowalnej sezonowości jest możliwa dzięki wykorzystaniu statystyki testu stabilnej sezonowości Friedmana i testu ruchomej sezonowości:

$$T = \left( \frac{\frac{7}{F_S} + \frac{3F_M}{F_S}}{2} \right)^{0.5}, \quad (3.45)$$

gdzie:

$$F_S = \frac{\sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2}{k-1} \text{ jest statystyką testu Friedmana,}$$

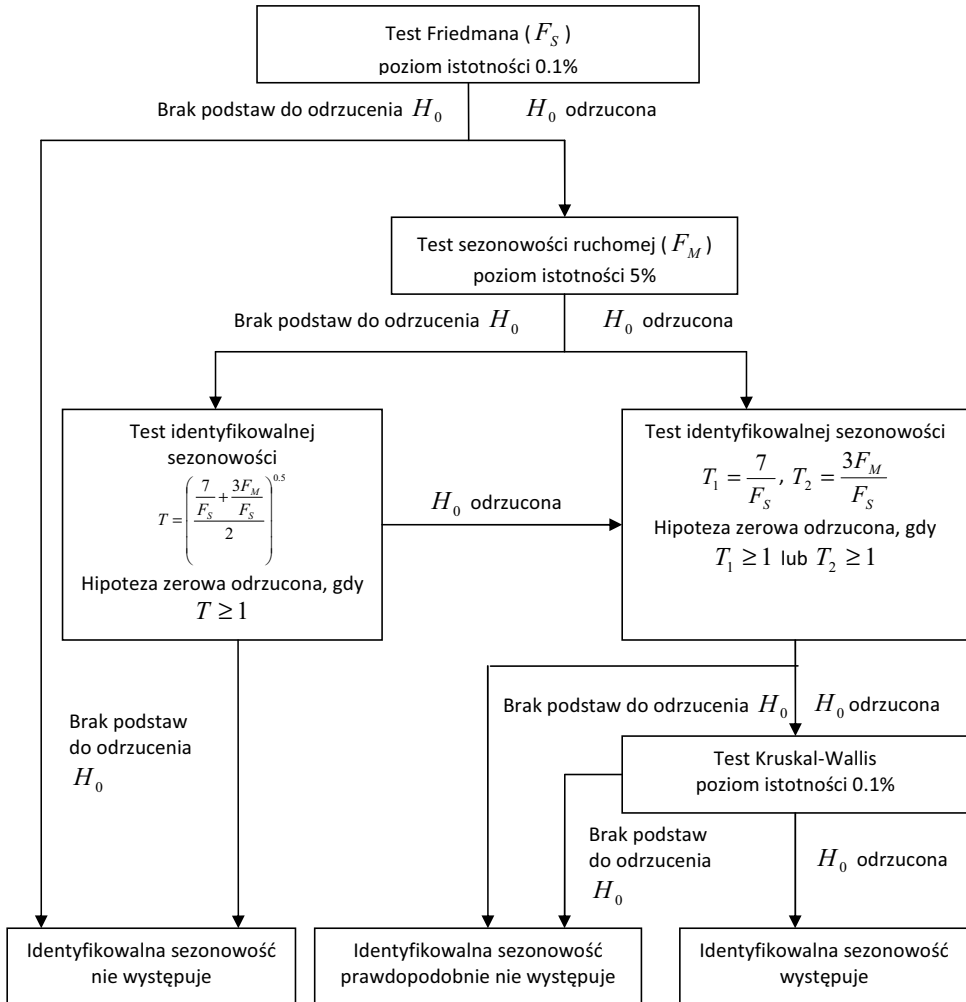
$$\frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{i,j} - \bar{x}_{\cdot j})^2}{n-k}$$

$$F_M = \frac{\frac{S_B^2}{(n-1)}}{\frac{S_R^2}{(n-1)(k-1)}} \text{ to statystyka testu ruchomej sezonowości.}$$

### Złożony test sezonowości

Połączenie opisanych powyżej testów sezonowości umożliwiło stworzenie procedury weryfikującej hipotezę o występowaniu sezonowości w szeregu czasowym. Wynik testu złożonego może wskazywać na występowanie możliwej do zidentyfikowania sezonowości, wykluczać jej występowanie lub sugerować niskie prawdopodobieństwo występowania identyfikowalnej sezonowości. Algorytm stosowany w procedurze testowej przedstawia rysunek 3.4.1.

**Rysunek 3.4.1. Algorytm oceny występowania sezonowości w szeregu czasowym**



Źródło: [Ladiray, Quenneville 2001].

### Test sezonowości rezydualnej

Sezonowo wyrównany szereg powinien być pozbawiony wszelkich istotnych wahań sezonowych. Test sprawdzający, czy cel ten został osiągnięty polega na usunięciu trendu z sezonowo wyrównanego szeregu czasowego poprzez obliczenie trzecich różnic<sup>39</sup>, a następnie przeprowadzeniu testu Friedmana<sup>40</sup>.

<sup>39</sup> Operacja ta polega na obliczeniu wartości  $SA_t - SA_{t-3}$ , gdzie  $SA_t$  – wartość skorygowana sezonowo w okresie  $t$ .

<sup>40</sup> Patrz podrozdział 3.4.

Powyższy test jest wykonywany w dwóch wariantach: dla pełnej próby i dla obserwacji pochodzących z trzech ostatnich lat.

## Statystyki M i Q

Statystyki M i Q są narzędziem diagnostycznym ściśle opartym na wynikach poszczególnych iteracji metody X-12-ARIMA. Z tego powodu mogą one być stosowane do oceny tylko tych wyników, które zostały otrzymane w wyniku zastosowania algorytmu X-12-ARIMA.

Do zbioru statystyk M należą<sup>41</sup>:

- M1, która mierzy udział wariancji komponentu nieregularnego w wariancji szeregu;
- M2, która mierzy wielkość komponentu nieregularnego w odniesieniu do linowego trendu. Wartość statystyki M2 może prowadzić do błędnych wniosków, gdy trend nie jest (w przybliżeniu) liniowy. Z tego powodu jest ona niekiedy pomijana w analizie;
- M3, badająca stosunek wartości komponentu nieregularnego do trendu na początkowym etapie estymacji. Wysoka wartość M3 wskazuje na silną nieregularność w szeregu czasowym, mogącą negatywnie wpływać na przebieg dekompozycji;
- M4, sprawdzająca losowość komponentu nieregularnego na podstawie testu autokorelacji. Ze względu na to, że brak autokorelacji składnika sezonowego nie jest wymagany do tego, aby jakość wyrównania sezonowego była wysoka, statystyka M4 nie zalicza się do kluczowych miar jakości;
- M5, wskazująca na liczbę okresów potrzebnych, aby wariancja trendu-cyklu przewyższała wariancję składnika nieregularnego;
- M6, testująca, czy wielkość zmian w komponencie nieregularnym mierzonych rok do roku jest właściwa do zastosowania filtra  $3 \times 5$  do estymacji *SI*; Nadmiernie wysoka wartość M6 wskazuje na konieczność użycia krótszego filtra do szacowania *SI* [Guide to... 2007];
- M7, która jest testem identyfikowalnej sezonowości;
- M8, sprawdzająca wielkość krótkookresowych, quasi-losowych zaburzeń;
- M9, testująca obecność fluktuacji długookresowych w składniku sezonowym;
- M10, która jest zdefiniowana analogicznie jak M8 i jest obliczana dla obserwacji z trzech ostatnich lat w próbie;

---

<sup>41</sup> Szczegółowy opis statystyk M wraz z odpowiednimi formułami jest dostępny w [Lothian, Morry 1978].



- M11, która jest zdefiniowana analogicznie jak M9 i jest obliczana dla obserwacji z trzech ostatnich lat w próbie.

Statystyki M8, M9, M10 i M11 są pomocne w wykrywaniu obecności załamania wzorca sezonowego, które są zjawiskiem niepożądanym z punktu widzenia sezonowej korekty danych i wymagają indywidualnej analizy.

Każda ze statystyk M1–M11 może przyjmować wartości w zakresie [0,3], przy czym akceptowalne są wartości poniżej 1.

Wymienione powyżej statystyki wchodzą w skład ogólnej miary jakości Q zdefiniowanej następująco:

$$Q = \frac{10M1 + 11M2 + 10M3 + 8M4 + 11M5 + 10M6 + 18M7 + 7M8 + 7M9 + 4M10 + 4M11}{100}.$$

W przypadku gdy szereg czasowy jest krótszy niż 6 lat, statystyki M8, M9, M10 i M11 nie mogą być wyliczane i wartość miary Q jest wyrażona jako:

$$Q = \frac{14M1 + 15M2 + 10M3 + 8M4 + 11M5 + 10M6 + 32M7 + 0M8 + 0M9 + 0M10 + 0M11}{100}.$$

Jakość wyników wyrównania sezonowego uznaje się za akceptowalną, jeżeli wartości poszczególnych statystyk M i miary Q są mniejsze niż 1.

### Analiza podprób

Celem analizy podprób (ang. *sliding spans*)<sup>42</sup> jest ocena stabilności wyników sezonowej korekty danych. Stabilność badana jest poprzez wyodrębnienie z szeregu czasowego kilku podprób i wykonanie osobno dla każdej z nich sezonowej korekty danych, a następnie porównanie rezultatów z różnych podprób otrzymanych dla tych samych obserwacji. Pierwsza podpróba zawiera obserwacje pochodzące z analizowanego szeregu począwszy od pierwszej obserwacji do 1 + k obserwacji, gdzie k jest długością każdego z podzbiorów. Kolejna podpróba obejmuje zakres, którego początek i koniec są przesunięte o rok naprzód w stosunku do poprzedniej podpróby (w przypadku szeregu o częstotliwości miesięcznej są to odpowiednio obserwacje należące do przedziału [13, k + 13]). Kolejne podpróby konstruowane są analogicznie z uwzględnieniem rocznego przesunięcia w stosunku do poprzedniej podpróby. Liczba podprób zależy od długości szeregu czasowego i rzędu średniej ruchomej zastosowanej do estymacji składnika sezonowego<sup>43</sup>.

<sup>42</sup> Dokładny opis analizy podprób zawarty jest w pracy [Findley i inni 1998].

<sup>43</sup> Przykładowo, w przypadku zastosowania średniej ruchomej rzędu 3 × 5 długość podpróby wynosi 8 lat. Jeżeli dla poszczególnych okresów zastosowane zostały filtry sezonowe różnej długości, to do ustalenia długości podpróby używany jest najdłuższy z tych filtrów sezonowych.

Dla każdego okresu, który należy do co najmniej dwóch podprób obliczane są wartości trzech statystyk wyrażonych wzorami 3.46-3.48 <sup>44</sup>:

$$SS_t^{\max} = \frac{\max_{k \in N_t} S_t(k) - \min_{k \in N_t} S_t(k)}{\min_{k \in N_t} S_t(k)}, \quad (3.46)$$

gdzie:

$S_t(k)$  – czynnik sezonowy w okresie  $t$  dla  $k$ -tej podpróby,

$N_t = \{k: t\text{-ty okres zawiera się w } k\text{-tej podpróbie}\}$ .

$$MM_t^{\max} = \max_{k \in N_t} MM_t(k) - \min_{k \in N_t} MM_t(k), \quad (3.47)$$

gdzie:

$$MM_t(k) = \frac{SA_t(k) - SA_{t-1}(k)}{SA_{t-1}(k)},$$

$SA_t(k)$  – sezonowo wyrównana obserwacja z okresu  $t$ ,

pozostałe oznaczenia jak wyżej.

$$YY_t^{\max} = \max_{k \in N_t} YY_t(k) - \min_{k \in N_t} YY_t(k), \quad (3.48)$$

gdzie:

$$YY_t(k) = \frac{SA_t(k) - SA_{t-12}(k)}{SA_{t-12}(k)}.$$

Każda ze statystyk  $SS_t^{\max}$ ,  $MM_t^{\max}$  oraz  $YY_t^{\max}$  jest uznawana za niestabilną, jeżeli jej wartość przekracza 3%. Ogólny wynik sezonowej korekty danych jest traktowany jako niestabilny, jeżeli odsetek niestabilnych wartości statystyk  $SS_t^{\max}$ ,  $MM_t^{\max}$  lub  $YY_t^{\max}$  przekracza odpowiednio 25%, 40% lub 10%.

Analiza podprób jest wykorzystywana do wykrywania załamania wzorca sezonowego oraz porównania jakości wyników konkurencyjnych specyfikacji modelu. Program Demetra+ umożliwia wykonanie analizy podprób dla obu metod sezonowej korekty danych, mimo że oryginalnie ta miara przeznaczona była do testowania wyników X-12-ARIMA.

<sup>44</sup> Przedstawione formuły stosowane są dla danych o częstotliwości miesięcznej. Dla danych kwartalnych zamiast statystyki  $MM_t$  liczona jest statystyka  $QQ_t$ , a statystyka  $YY_t$  wyraża się wzorem:  $YY_t(k) = \frac{SA_t(k) - SA_{t-4}(k)}{SA_{t-4}(k)}$ .

## Historia rewizji

Historia rewizji (ang. *revision histories*) jest jednym z kryteriów oceny stabilności wyników wyrównania sezonowego. Polega ona na porównaniu różnicy pomiędzy wstępnymi a ostatecznymi wartościami sezonowo wyrównanego szeregu<sup>45</sup> dla danego okresu. Oszacowanie wstępne to wartość wyrównanej sezonowo obserwacji z okresu od 1 do  $n$ , otrzymana, gdy  $n$  jest ostatnim okresem szeregu czasowego. W miarę wydłużania szeregu czasowego o kolejne obserwacje i wykonywania dla niego korekt sezonowych, oszacowanie wstępne staje się oszacowaniem historycznym, czyli takim, którego wartość nie podlega istotnym zmianom w miarę dodawania kolejnych obserwacji. Historia rewizji analizuje zmiany oszacowań wstępnych z okresu na okres oraz bada tempo konwergencji oszacowania wstępnego do oszacowania historycznego (ostatecznego). Ocena wielkości rewizji jest wykonywana na podstawie średniej z względnej wartości rewizji oraz odchylenia standardowego względnej wartości rewizji.

Program Demetra+ oblicza historię rewizji dla obu metod sezonowej korekty danych, mimo że oryginalnie ta miara, podobnie jak analiza podprób, przeznaczona była do weryfikacji wyników X-12-ARIMA.

## Periodogram

Jednym z najlepszych narzędzi służących do wykrywania w dziedzinie częstości cyklicznych komponentów szeregu czasowego jest periodogram.

Dla wystandaryzowanego szeregu  $z_t$  ( $z_t = \frac{(y_t - \bar{y})}{\hat{\delta}_y}$ ) gdzie  $y_t$  – szereg czasowy,

$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{t \leq n} y_t}{n}$ ,  $\hat{\delta}_y^2 = \frac{\sum_{t=1}^{t \leq n} (y_t - \bar{y})^2}{n}$ ) periodogram jest zdefiniowany jako:

$$I_{n,z}(\lambda) = \frac{2}{n} (C_{n,z}^2(\lambda) + S_{n,z}^2(\lambda)) \quad (3.49)$$

gdzie:

$$C_{n,z}(\lambda) = \sum_{t=1}^n \cos(\lambda t) z_t,$$

$$S_{n,z}(\lambda) = \sum_{t=1}^n \sin(\lambda t) z_t,$$

$n$  – liczba obserwacji szeregu  $y_t$ .

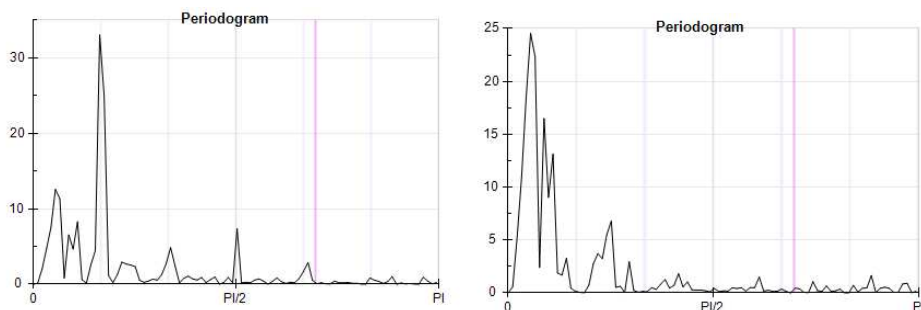
---

<sup>45</sup> Analogiczna analiza jest wykonywana dla trendu-cyklu.

Częstości Fouriera dla periodogramu są określone jako:  
 $\lambda_j = \frac{2\pi j}{n}, 0 < j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ . Pokrycie się punktu, dla którego periodogram osiąga lokalne

maksimum z częstością sezonową lub częstością dni roboczych świadczy o występowaniu wahań sezonowych w szeregu czasowym. Należy zatem oczekiwać, że periodogram wykonany dla danych wyrównanych sezonowo nie będzie posiadać tej cechy.

**Rysunek 3.4.2. Periodogram szeregu surowego (lewy) oraz wyrównanego sezonowo (prawy)**



Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Na rysunku 3.4.2 przedstawiono porównanie periodogramów dla szeregu czasowego miesięcznych cen mleka przed (rysunek 3.4.2, lewy) i po wykonaniu desezonalizacji za pomocą procedury X-12-ARIMA (rysunek 3.4.2, prawy). Na podstawie powyższych wykresów można wnioskować, że w oryginalnym szeregu czasowym istniały wahania sezonowe występujące raz na cztery miesiące (pik dla częstości równej  $\frac{\pi}{2}$ ) oraz raz na rok (pik dla częstości równej  $\frac{\pi}{6}$ ). Natomiast nie występowały, zmiany związane z liczbą dni roboczych w miesiącu, co jest logiczne, bo produkcja mleka, a tym bardziej ceny nie zależą od liczby dni roboczych w miesiącu (częstość dni roboczych jest oznaczona różową pionową linią). Procedura sezonowej korekty danych doprowadziła do usunięcia wymienionych powyżej wahań. Najważniejszym komponentem, który pozostał w szeregu czasowym po eliminacji wahań sezonowych są zmiany długookresowe (TC), którym odpowiadają niskie częstotliwości.



## **4. Analiza i modele szeregów czasowych cen zbóż i cen mleka**

Niniejszy rozdział przybliży najważniejsze właściwości szeregów czasowych miesięcznych cen zbóż i mleka w latach 1996-2011. Prawidłowości przedstawione tutaj mogą stanowić podstawę wyboru metod prognozowania oraz stanowić wskazówki dla analityków wykonujących krótkookresowe prognozy. Analizy przeprowadzono w programie Demetra+<sup>46</sup> z wykorzystaniem metod X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS. Metody te opisano w rozdziale 3.

Każdy z rozdziałów podzielono na 4 części. Każdorazowo analizę rozpoczęto od omówienia charakterystyki oszacowanych modeli prognostycznych na etapach RegARIMA oraz TRAMO. Na podstawie modeli oszacowanych w niniejszym rozdziale oraz w rozdziale 5 zbudowano prognozy wygasłe, których dokładność analizowano w dalszej części opracowania (rozdział 6.2). Dalej scharakteryzowano prawidłowości szeregów czasowych, takie jak wahania sezonowe i cykliczne. Kolejne części zawierają charakterystykę jakości procedury dekompozycji szeregu czasowego na trend-cykl (TC), składnik sezonowy (S) oraz wahania nieregularne (I). Na końcu podrozdziałów zawarto krótkie podsumowanie.

### **4.1. Ceny pszenicy**

W okresie objętym badaniem ceny pszenicy podlegały wyraźnym fluktuacjom związanym z cyklami towarowymi. Długookresowy trend-cykl ma tendencję rosnącą wynikającą z działania czynnika inflacyjnego oraz tendencji kształtujących się na rynkach światowych. Długość wahań cyklicznych zawiera się w przedziale 3-4 lat. Amplituda wahań cyklicznych zwiększa się w czasie, co wskazuje na multiplikatywną zależność pomiędzy komponentami szeregu cen pszenicy (rysunek 4.1.1). Graficzna analiza przebiegu szeregu czasowego wskazuje, że trend-cykl jest jego dominującą składową. Sezonowe i przypadkowe zmiany cen są relatywnie niewielkie.

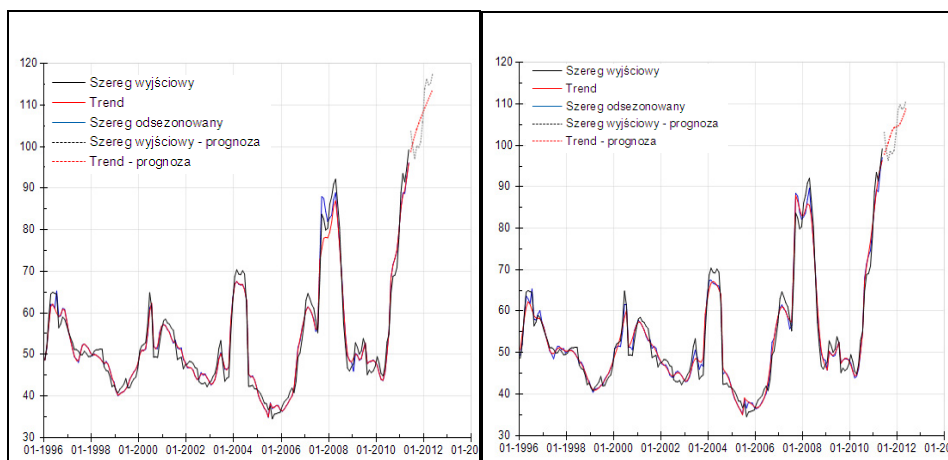
---

<sup>46</sup> Demetra+ to opracowany przez Eurostat i Bank Belgii program do sezonowej korekty danych metodami X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS. Narzędzie wraz z dokumentacją jest dostępne pod adresem <http://cros-portal.eu/page/demetra-net-windows.htm>.

## Modele prognostyczne

Do opisu zachowania cen pszenicy, a w konsekwencji do prognozowania, oszacowano dwa modele, których statystyki przedstawiono w tabeli 4.1.1. Wszystkie parametry są statystycznie istotne. Modele oparte na obydwu procedurach są jednakowe w części sezonowej, zaś w niesezonowej model RegARIMA posiada jeden parametr autoregresyjny, z kolei model TRAMO – jeden parametr średniej ruchomej.

**Rysunek 4.1.1. Ceny pszenicy w Polsce w latach 1996-2011 (zł/dt). Szereg wyjściowy oraz szacunki trendu i danych wyrównanych sezonowo na podstawie modeli: X-12-ARIMA (lewy) oraz TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Cechą charakterystyczną cen pszenicy, podobnie jak cen innych zbóż, jest występowanie względnie wysokiego odsetka obserwacji nietypowych w próbie. Obserwacje te zostały ujęte w postaci dodatkowych regresorów zamieszczonych w dalszej części tabeli 4.1.1. Oszacowana, na etapie oczyszczania szeregu z obserwacji nietypowych, siła i kierunek wpływu poszczególnych zdarzeń nadzwyczajnych na ceny pszenicy jest zbliżona w obu metodach.

Obserwacje nietypowe występują zazwyczaj w drugiej połowie roku, gdy dostępna staje się informacja o rzeczywistych zbiorach. Przyczyną ich występowania jest silna zależność cen pszenicy od wielkości zbiorów i jakości ziarna. Dodatkowo nakłada się na to wysoki stopień uregulowania tego rynku skutkujący przeprowadzaniem interwencji. Przykładowo, niskie zbiory w Polsce i na świecie w 2003 r. spowodowały znaczny wzrost cen pod koniec tego roku. Nałożenie się na siebie efektu zmian regulacji rynku pszenicy po wejściu do

Unii Europejskiej, spadku cen do poziomu cen interwencyjnych oraz wysokich plonów spowodowało wystąpienie w sierpniu 2004 r. trwałego obniżenia poziomu cen.

**Tabela 4.1.1. Parametry modeli RegARIMA i TRAMO**

Parametr	RegARIMA		TRAMO	
	Wartość/ odchylenie standardowe	Statystyka t / poziom istotności	Wartość / odchylenie standardowe	Statystyka t / poziom istotności
AR(1)	-0,6745/0,0537	-12,56/0,0000		
MA(1)			0,6023/0,0640	9,42/0,0000
SMA(1)	-0,8513/0,0490	-17,38/0,0000	-0,8802/0,0916	-9,61/0,0000
AO[7.1996]	0,0855/0,0170	5,02/0,0000	0,0765/0,0166	4,61/0,0000
LS[8.2000]	-0,1805/0,0284	-6,36/0,0000	-0,1639/0,0292	-5,61/0,0000
LS[11.2003]	0,1516/0,0280	5,42/0,0000	0,1500/0,0288	5,48/0,0000
LS[8.2004]	-0,3075/0,0282	-10,84/0,0000	-0,2979/0,0292	-10,20/0,0000
LS[7.2005]	0,1348/0,0282	4,78/0,0000	-0,535/0,0291	5,28/0,0000
RP [7.2007-9.2007]	0,4329/0,0549	7,89/0,0000	0,4148/0,0652	6,36/0,0000
LS[2.2009]	0,1131/0,0283	3,99/0,0000	0,0994/0,0291	3,42/0,0000
LS[8.2009]	-0,1280/0,0292	-4,38/0,0000	-0,1479/0,0300	4,93/0,0000
LS[8.2010]	0,1352/0,0295	4,58/0,0000	0,1258/0,0298	-4,22/0,0000

Specyfikacja modeli: RegARIMA – (1,1,0)(0,1,1), TRAMO – (0,1,1)(0,1,1).

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

W 2007 r. miał miejsce silny wzrost cen, na który złożyły się niskie zbiory światowe oraz wzrost popytu na biopaliwa, związany ze wzrostem cen ropy. Wzrost cen w drugiej połowie 2007 r. odbywał się stopniowo i z tego względu jest on modelowany przy pomocy regresora typu RP. O ile zwiększenie inflacji w lutym 2009 r. wynikało raczej z przesadnej reakcji na wzrost cen światowych pszenicy, to spadek cen, jaki miał miejsce w sierpniu 2008 r., odzwierciedlał efekt wysokich zbiorów w Polsce i na świecie. Ograniczenia eksportu zbóż, jakie weszły w życie w Rosji i na Ukrainie, a także bardzo niskie zbiory światowe i niedobory surowca wysokiej jakości, spowodowały nadzwyczajny wzrost cen pszenicy w sierpniu 2008 r.

Oszacowane modele prognostyczne poddano weryfikacji mającej na celu ocenę ich jakości z uwagi na wymagania stawiane modelom ekonometrycznym. Najważniejsze z nich koncentrują się na rozkładzie składnika losowego. Wyniki te zawarto w tabeli 4.1.2.



**Tabela 4.1.2. Charakterystyka reszt z modeli prognostycznych RegARIMA i TRAMO**

Test	RegARIMA	TRAMO
	Statystyka testowa	
Normalność reszt		
Średnia	0,9477	0,9187
Skośność	0,2982	0,3233
Kurtoza	0,7098	0,7292
Test normalności	0,4880	0,5159
Niezależność		
Test Ljung-Boxa (24 opóźnienia)	0,0972	0,0971
Test Boxa-Pierce'a (24 opóźnienia)	0,1520	0,1506
Test Ljung-Boxa dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,0943	0,1824
Test Boxa-Pierce'a dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,1423	0,2487
Liniowość reszt		
Test Ljung-Boxa na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,0117	0,0059
Test Boxa-Pierce'a na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,0304	0,0165

W sekcji „Normalność reszt” przytoczono poziom istotności dla testu normalności Doornika-Hansena, a także poziomy istotności dla testów zbieżności wartości skośności i kurtozy z wartościami charakterystycznymi dla rozkładu normalnego oraz testu zerowej średniej reszt.

*Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.*

Reszty z modeli RegARIMA i TRAMO mają rozkład normalny (wartości średniej, skośności i kurtozy odpowiadają w przybliżeniu rozkładowi normalnemu). Rezultat testu na niezależność reszt wskazuje, że liczba i długość serii wzrostów i spadków cen pszenicy ma charakter przypadkowy. Wyniki testów Ljung-Boxa i Boxa-Pierce'a świadczą o braku autokorelacji reszt do 24. opóźnienia włącznie oraz braku autokorelacji dla opóźnień sezonowych. Otrzymane wartości statystyk dla analogicznych testów wykonanych na kwadratach reszt wskazują na brak zależności nieliniowych w resztach. Można zatem ocenić, że oszacowane modele prognostyczne spełniają stawiane im wymagania, ponieważ wszystkie prawidłowości obserwowane w szeregach czasowych cen zostały ujęte przez parametry modelu.

### **Analiza prawidłowości i diagnostyka dekompozycji szeregu czasowego**

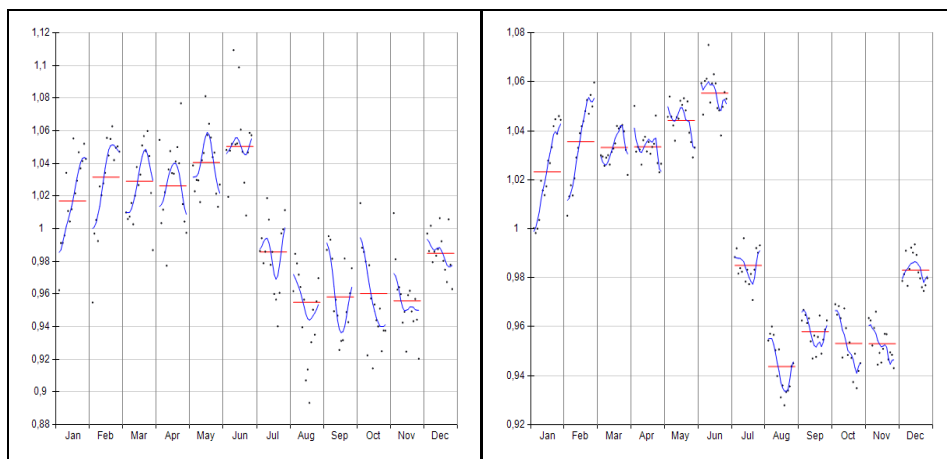
Z analitycznego i prognostycznego punktu widzenia ważne jest przybliżenie charakterystyk najważniejszych prawidłowości występujących w szeregach czasowych cen surowców rolnych. Szczególną uwagę poświęca się wahaniom sezonowym i koniunkturalnym.

Wahania sezonowe produkcji roślinnej wydają się być oczywiste. Kształt wzorca wahań sezonowych uzyskanych za pomocą modeli X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS przedstawiono na rysunku 4.1.2. Obie metody wskazują, że w pierwszej połowie roku, ze względu na czynniki sezonowe ceny są wyższe od średniej, a w drugiej połowie roku – niższe. W styczniu i lutym wyraźnie za-

znacza się stopniowe zwiększanie siły efektu sezonowego w miarę upływu lat, podczas gdy dla sierpnia i października efekt ten ma kierunek odwrotny.

Czynniki sezonowe dla poszczególnych miesięcy uwidocznione na rysunku 4.1.2 podlegają stopniowej ewolucji. Innymi słowy, wzorec wahań sezonowych ulega powolnym zmianom w czasie. Wśród przyczyn takiego stanu rzeczy można wymienić zaniechanie corocznych interwencji na rynku tego zboża w okresie żniw po przystąpieniu Polski do Unii Europejskiej. Efektem tego jest wzrost amplitudy wahań sezonowych w porównaniu do okresu przedakcesyjnego.

**Rysunek 4.1.2. Czynniki sezonowe oszacowane za pomocą metod: X-12-ARIMA (prawy) i TRAMO/SEATS (lewy)**



Oznaczenia: czarny – wskaźnik SI, niebieski – czynnik sezonowy w danym okresie, czerwony – średnia wartość czynnika sezonowego dla danego okresu.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Wynik testu Friedmana (tabela 4.1.3) wskazuje, że zmiany cen pszenicy w ciągu roku są wystarczająco regularne do określenia je jako sezonowe. Jednocześnie statystyka testu sezonowości ruchomej oznacza, że wzorec wahań sezonowych stopniowo ewoluuje w czasie. Łączny test sezonowości potwierdził, że ceny pszenicy podlegają statystycznie istotnym wahaniom sezonowym. Stąd prawidłowe jest stosowanie w tym przypadku procedur sezonowej korekty danych. Ostatni z testów zamieszczonych w tabeli 4.1.3 wykonany na sezonowo wyrównanych danych potwierdza, że zastosowane procedury desezonalizacji umożliwiły całkowite usunięcie wahań sezonowych z szeregu czasowego cen pszenicy.

**Tabela 4.1.3. Testy sezonowości dla wyników metod: X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS**

Test	X-12-ARIMA	TRAMO/SEATS
	Poziom istotności / wynik	Poziom istotności / wynik
Test Friedmana	0,0000 (występuje stabilna sezonowość)	0,0000 (występuje stabilna sezonowość)
Test sezonowości ruchomej	0,0000 (występuje sezonowość ruchoma)	0,0000 (występuje sezonowość ruchoma)
Łączny test sezonowości	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym
Test sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej

W tabeli podano wartości poziomu istotności bądź wyniku testu. Przyjęte poziomy istotności, przy których odrzucana jest odpowiednia hipoteza zerowa: Test Friedmana – 1%, Test sezonowości ruchomej – 20%, Test sezonowości rezydualnej - 10%, Łączny test sezonowości – patrz rozdział 3.

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

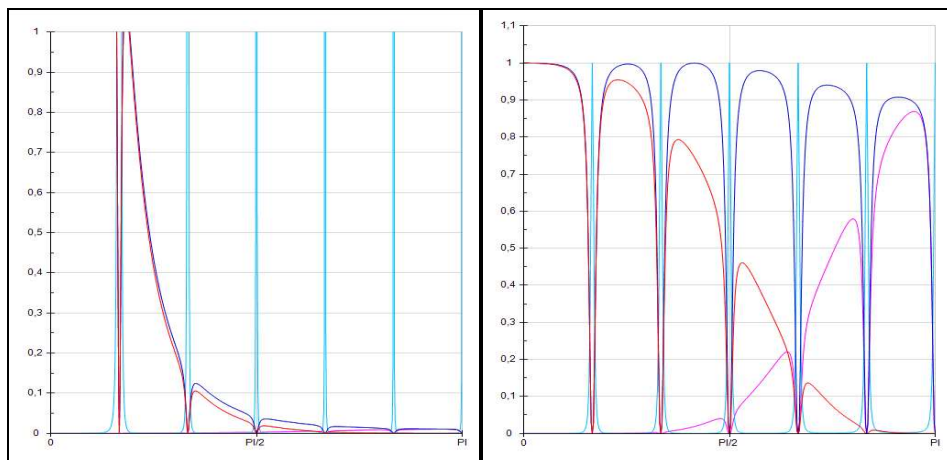
Ze wskazanego powyżej powodu (ruchoma sezonowość) zdecydowano się na użycie w metodzie X-12-ARIMA mieszanych filtrów średniej ruchomej. Dla sierpnia, który wyróżnia się na tle innych okresów roku większą niestabilnością zastosowano dłuższy filtr (3x9) niż dla pozostałych miesięcy (3x5), co pozwoliło na wygładzenie czynnika sezonowego dla tego okresu. Dobrana w sposób automatyczny długość filtra Hendersona (11 okresów) wskazuje, że komponent nieregularny nie jest nadmiernie wysoki w stosunku do trendu-cyklu, co potwierdza wyniki wcześniejszej analizy graficznej<sup>47</sup>.

W metodzie TRAMO/SEATS stopniowe zmiany wzorca sezonowego zostały odwzorowane dzięki obecności sezonowego parametru autoregresyjnego modelu ARIMA(0,0,0)(1,1,1) przyjętego do estymacji komponentu sezonowego na etapie dekompozycji.

Funkcja gęstości spektralnej komponentu sezonowego otrzymanego metodą TRAMO/SEATS koncentruje się wokół częstości sezonowych, co świadczy o deterministycznej naturze tego składnika (rysunek 4.1.3, lewy). W szeregu pozbawionym wahań sezonowych uwzględnione zostało 100% zmienności dla częstości mniejszych od  $\frac{\pi}{2}$  oraz ponad 90% zmienności w przedziale  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  z wyłączeniem częstości sezonowych (rysunek 4.1.3., prawy).

<sup>47</sup> Im większa jest wartość komponentu nieregularnego w stosunku do trendu-cyklu, tym dłuższy filtr Hendersona powinien być zastosowany do estymacji trendu-cyklu. Więcej w [Guide to Seasonal... 2007].

**Rysunek 4.1.3. Funkcje gęstości spektralnej estymatorów komponentów szeregu czasowego (lewy) i kwadraty charakterystyk częstotliwościowych estymatorów komponentów szeregu czasowego (prawy) dla metody TRAMO/SEATS**

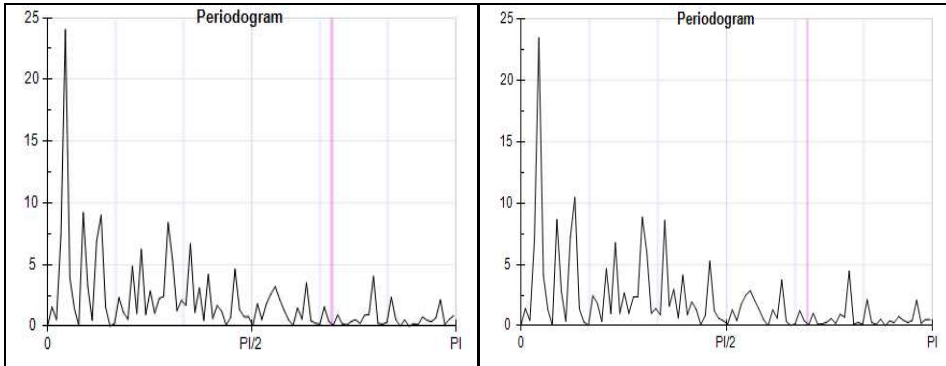


Oznaczenia: czerwony – trend-cykl, niebieski – składnik sezonowy, różowy – komponent nieregularny, granatowy – szereg wyrównany sezonowo.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Periodogramy szeregu wyrównanego sezonowo obiema metodami są niemal identyczne (rysunek 4.1.4). Dla zmian cen pszenicy największe znaczenie mają wahania o okresie dłuższym niż jeden rok (wartości periodogramu są najwyższe w przedziale  $(0, \pi/6)$ ). Maksymalne wartości periodogramów (ok. 24% zmienności) odpowiadają cyklowi o długości 46 miesięcy. Należy podkreślić, że długość cykli koniunkturalnych dla cen pszenicy nie jest stała w czasie. Z tego powodu obserwowane są również lokalne maksima dla częstości równoznacnej cyklowi 24-miesięcznym i 17- miesięcznym (każde odpowiada za ok. 9% zmienności). Za istotną część zmienności odpowiadają również wahania niesezonowe obecne w pobliżu częstości  $\frac{\pi}{3}$ , oznaczającej występowanie impulsu o częstości półrocznej.

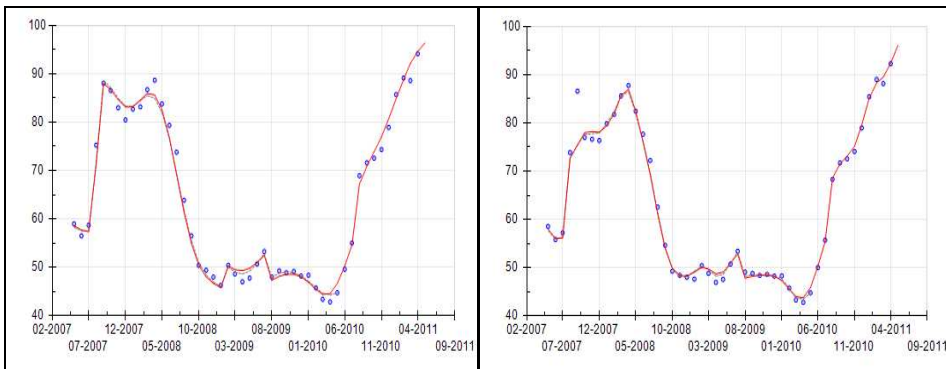
**Rysunek 4.1.4. Periodogramy postaci stacjonarnej szeregu wyrównanego sezonowo metodami X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Metody X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS służą przede wszystkim do dekompozycji szeregów czasowych na trend-cykl (TC), wahania sezonowe (S) oraz składnik przypadkowy (I). Stąd niżej przedstawimy ocenę jakości stosowanych procedur.

**Rysunek 4.1.5. Historia rewizji trendu-cyklu uzyskanego metodami: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



Oznaczenia: czerwony – oszacowanie ostateczne trendu-cyklu, niebieski – oszacowanie wstępne trendu-cyklu.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Historia rewizji (rysunek 4.1.5) wskazała, że pierwsze oszacowania trendu-cyklu nie podlegają znacznym zmianom w miarę dodawania kolejnych obserwacji. W przypadku metody X-12-ARIMA znaczącą rewizję odnotowano jedynie w kwietniu 2008 r. Była ona związana ze zmianą kierunku rozwoju trendu-cyklu i została wykryta dopiero po upływie kilku okresów. Wyniki me-

tody TRAMO/SEATS również wskazują na brak istotnych rewizji oszacowania trendu-cyklu z wyjątkiem oszacowania dla października 2007 r. odzwierciedlającego niepewność związaną z początkiem kolejnej fazy cyklu gospodarczego.

**Tabela 4.1.4. Miary jakości sezonowej korekty danych dla metody X-12-ARIMA**

Miara	Wartość statystyki testowej	Miara	Wartość statystyki testowej
M1	0,183	M7	0,578
M2	0,052	M8	0,944
M3	0,000	M9	0,458
M4	1,020	M10	0,902
M5	0,000	M11	0,000
M6	0,555	Q	0,399

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Wartości wszystkich statystyk M modelu X-12-ARIMA (tabela 4.1.4), z wyjątkiem M4, znajdują się poniżej wartości progowej równej 1, co oznacza, że charakterystyki poszczególnych komponentów szeregu czasowego mieszczą się w założonym wzorcu. Statystyka M4 bada autokorelację składnika nieregularnego i przekroczenie przez nią wartości granicznej sugeruje potrzebę skrócenia filtru Hendersona i filtru sezonowego. Dla omawianego szeregu czasowego można jednak uznać, że statystyka M4 znajduje się na granicy obszaru dopuszczalnych wartości. Blisko wartości granicznej są również statystyki M8 i M10, co wskazuje na znaczne, choć mieszczące się w normie, fluktuacje komponentu sezonowego, zarówno w całej próbie (M8), jak i w trzech ostatnich latach (M10).

**Tabela 4.1.5. Wariancja komponentów i ich estymatorów uzyskanych za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Komponent	Estymator teoretyczny	Estymacja	Poziom istotności
Trend-cykl	0,5343	0,3775	0,4228	0,3853
Szereg skorygowany	0,9418	0,8301	0,7941	0,6992
Komponent sezonowy	1,8887	0,0412	0,0199	0,3389
Komponent nieregularny	0,0679	0,0220	0,0174	0,1592

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Dla wszystkich składowych szeregu cen pszenicy oszacowanego metodą TRAMO/SEATS spełnione zostało założenie o tym, że wariancja estymatora teoretycznego i empirycznego („estymacja”) jest do siebie zbliżona (tabela 4.1.5). Na podstawie wyników testu można stwierdzić, że żaden komponent nie został niedoszacowany ani przeszacowany. Oznacza to, że w wyniku dekompozycji otrzymano komponenty o pożądanych własnościach.

Korelacja pomiędzy komponentami jest bardzo mała, tak więc założenia modelu zostały spełnione. Na podstawie wyniku testu przedstawionego w tabeli

4.1.6 można przyjąć, że składowe szeregu cen pszenicy są względem siebie ortogonalne. Wynika stąd, że wahania cykliczne i długookresowe, sezonowe i nieregularne są od siebie niezależne i mogą być analizowane odrębnie.

**Tabela 4.1.6. Korelacje między składowymi szeregów czasowych uzyskanymi za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Estymator teoretyczny	Estymacja	Poziom istotności
Trend-cykl/Komponent sezonowy	-0,1206	-0,0715	0,6202
Trend-cykl/Komponent nieregularny	0,0912	0,0017	0,1738
Kom. sezonowy/Komp. nieregularny	0,0244	0,0420	0,2307

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

## Podsumowanie

- Cechą charakterystyczną nominalnych cen pszenicy jest dodatni trend i rosnąca amplituda wahań średniookresowych w kolejnych cyklach towarowych. Wahania cykliczne o długości około 46 miesięcy mają największy udział w kształtowaniu się cen i od ich prawidłowego wyznaczenia i ekstrapolacji w największym stopniu zależy dokładność krótkookresowych prognoz cen pszenicy.
- Oszacowany wzorzec wahań sezonowych wskazuje na wyraźny podział roku na dwa okresy – w pierwszych sześciu miesiącach ceny są wyższe od średniorocznych, a w drugiej połowie roku – niższe. Wpływ czynników sezonowych na zmiany cen jest stosunkowo niewielki, gdyż amplituda średniorocznych cen waha się od około 95% (sierpień – listopad) do 105% (maj i czerwiec). W miarę upływu czasu znaczenie komponentu sezonowego stopniowo wzrasta, a wzorzec zmian ulega powolnej ewolucji – przykładowo stopniowo zwiększa się sezonowy wzrost cen w lutym.
- Specyfika produkcji tego surowca powoduje częste, niespodziewane zaburzenia jego cen. Z reguły są one wywołane niekorzystnymi warunkami pogodowymi i są zlokalizowane w sąsiedztwie punktów zwrotnych trendu. Taka zależność obniża wiarygodność prognoz oszacowanych metodami bazującymi na modelach szeregów czasowych, takich jak X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS.
- Modele oszacowane metodami X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS wyjaśniają najważniejsze prawidłowości kształtujące ceny pszenicy oraz spełniają wszystkie warunki nakładane modelom ekonometrycznym w zakresie istotności parametrów, rozkładu składnika losowego oraz dopasowania modelu do danych empirycznych.

## 4.2. Ceny żyta

Spśród wszystkich zbadanych szeregów charakterystyki cen żyta podlegały najbardziej gwałtownym przemianom w ostatnich latach. Wstępne analizy wykonane na całej dostępnej próbie wykazały, że wraz z przystąpieniem Polski do Unii Europejskiej i wynikającej stąd transformacji ekonomicznych uwarunkowań prowadzenia działalności rolnej, zmianie uległy prawidłowości charakteryzujące ceny żyta. Dotyczy to również fluktuacji średniookresowych, związanych z cyklami gospodarczymi oraz wzorca wahań sezonowych. Przyczyn tego procesu można upatrywać w zaniechaniu interwencji na tym rynku oraz wpływie kryzysu finansowego na rynek produktów rolnych. Wymienione powyżej czynniki zmieniły w istotny sposób proces generujący szereg cen żyta, w wyniku czego, na skutek braku zachowania podstawowych założeń nakładanych na model statystyczny, analiza pełnej próby stała się niemożliwa.

Z tego powodu zdecydowano się na wydzielenie z szeregu czasowego dwóch podprób. Pierwsza z nich obejmuje okres od 02.1997 r. do 04.2004 r., a druga okres od 05.2004 r. do 05.2011 r. Za punkt podziału przyjęto miesiąc wstąpienia Polski do Unii Europejskiej, gdyż było to najbardziej znaczące, jednoznacznie zdefiniowane i umiejscowione w czasie wydarzenie, jakie zaszło w okresie, w którym dotychczasowe zachowanie szeregu uległo przeobrażeniu. Wejście do UE znacząco zmieniło warunki funkcjonowania rynku. Zestawienie rezultatów otrzymanych w konsekwencji zastosowania tego punktu podziału z wynikami, jakie są generowane po przyjęciu alternatywnych dat granicznych, potwierdziły słuszność dokonanego wyboru.

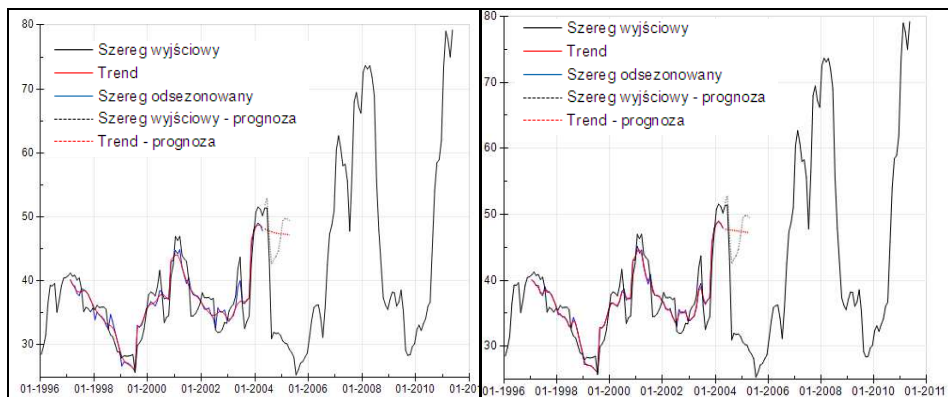
### Modele prognostyczne

Wstępna analiza szeregu cen żyta wykazała występowanie okresów wzmózonej zmienności, zmian w historycznych wzorcach fluktuacji oraz znacznej liczby obserwacji nietypowych, w wyniku czego prawdopodobne jest wystąpienie trudności z doбором modeli oraz trafnością prognoz.

Początkowy okres próby został pominięty ze względu na trudności estymacyjne wynikające z wystąpienia w 1996 r. nietypowo niskiego poziomu cen żyta. Należy podkreślić, że drugi z podszeregów obejmuje zaledwie 5 pełnych lat, co oznacza, że zgodnie z wytycznymi Eurostatu kwalifikowany jest on jako krótki szereg czasowy [ESS Guidelines ... 2009] i można spodziewać się problemów ze spełnieniem założeń modeli sezonowej korekty danych.



**Rysunek 4.2.1. Ceny żyta w Polsce w latach 1997-2004 (zł/dt). Szereg wyjściowy oraz szacunki trendu i danych wyrównanych sezonowo na podstawie modeli: X-12-ARIMA (lewy) oraz TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Procedura desezonalizacji została przeprowadzona oddzielnie dla każdego z przedziałów czasowych. Poniżej zestawiono i omówiono wyniki otrzymane dla wyróżnionych podszeregów. We wszystkich modelach cen żyta założono występowanie multiplikatywnej zależności pomiędzy komponentami.

**Tabela 4.2.1. Parametry modeli RegARIMA i TRAMO**

Parametr	RegARIMA		TRAMO	
	Wartość/ odchylenie standardowe	Statystyka t/ poziom istotności	Wartość/ odchylenie standardowe	Statystyka t/ poziom istotności
Lata 1996-2004				
MA(1)			0,1445/ 0,1167	1,24/0,2196
SMA(1)	-0,6957/0,0987	-7,05/0,0000	-0,6938/ 0,1806	-3,84/0,0003
LS[08.1999]	0,2382/0,0366	6,51/0,0000	0,1866/ 0,0386	4,84/0,0000
LS[11.2000]	0,1508/0,0368	4,09/0,0001	0,1494/ 0,0360	4,15/0,0001
LS[11.2003]	0,1994/0,0394	5,07/0,0000	0,2390/ 0,0358	6,68/0,0000
Lata 2004-2011				
AR(1)	-0,4353/0,1094	-3,98/0,0002		
MA(1)	0,5924/0,0996	5,95/0,0000	0,9904/0,1189	8,33/0,0000
MA(2)			0,2985/0,1185	2,52/0,0141
SMA(1)	-0,9996/0,1095	-9,13/0,0000	-0,9850/0,0203	-48,44/0,0000
LS[08.2004]	-0,3282/0,0318	-10,33/0,0000	-0,3316/0,0320	-10,36/0,0000
LS[08.2009]	-0,1930/0,0306	-6,31/0,0000	-0,1907/0,0309	-6,17/0,0000

Specyfikacja modeli dla lat 1996-2004: RegARIMA – (0,1,0)(0,1,1), TRAMO –(0,1,1)(0,1,1).

Specyfikacja modeli dla lat 2004-2011: RegARIMA – (1,1,1)(0,1,1), TRAMO –(0,1,2)(0,1,1).

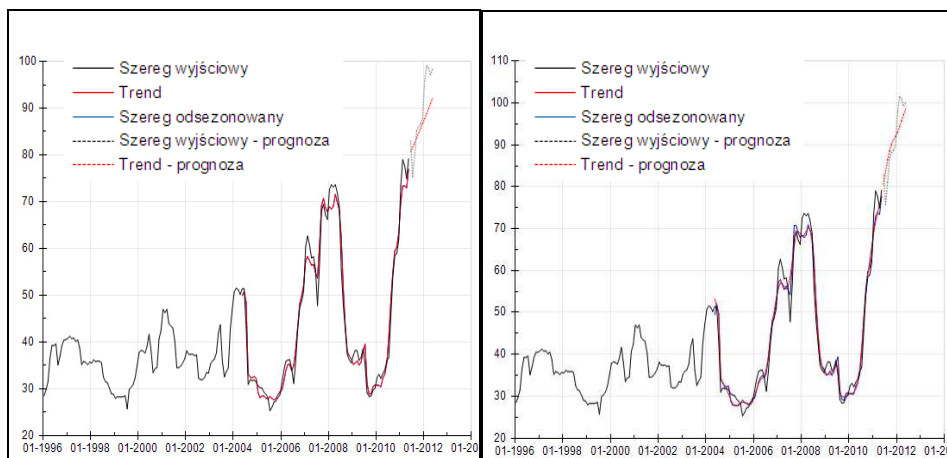
Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Ceny żyta w długim okresie zachowują się w sposób zbliżony do cen pszenicy, co wynika z wysokiego stopnia podobieństwa podaży oraz

substytucyjności wykorzystania. Procedura sezonowej korekty danych dla okresu 1997-2004 wykryła wystąpienie trzech trwałych zmian poziomu długookresowego trendu (tabela 4.2.1). W 1999 r. i 2003 r. ich przyczyną był wzrost cen światowych, natomiast w 2000 r. wzrost ceny żyta był dodatkowo spowodowany interwencją w sytuacji niskich zbiorów. Rysunek 4.2.1 wskazuje, że obie metody prognozowały stopniowy spadek poziomu cen żyta w drugiej połowie 2004 r., jednakże rzeczywista dynamika tego procesu okazała się znacznie większa. Niska dokładność tych prognoz wynika z tego, że wykonane zostały w pobliżu punktu zwrotnego trendu-cyklu i w okresie zmiany procesu generującego dane.

Od 2004 r. amplituda wahań sezonowych, w porównaniu do pierwszej podpróby, uległa zwielokrotnieniu (rysunek 4.2.3). W tym okresie zidentyfikowano dwa trwałe obniżenia poziomu cen (tabela 4.2.1). Pierwszy z nich był związany ze zmianą regulacji prawnych po wejściu Polski do UE, natomiast drugi był wynikiem bardzo dobrych zbiorów w Polsce i na świecie.

**Rysunek 4.2.2. Ceny żyta w latach 2004-2011 oraz oszacowania na podstawie modeli: X-12-ARIMA (lewy) oraz TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Jak wynika ze statystyk zebranych w tabeli 4.2.1, zmiany poziomu cen żyta, podobnie jak cen pszenicy (por. tabela 4.1.1), mają charakter trwały, mimo że przyczyny leżące u ich podstaw wygasają w miarę upływu czasu. Generalnie efekty zdarzeń szokowych, wynikających z czynników pogodowych, powinny być modelowane za pomocą zmiennych typu TC. Szeregi cen zbóż cechuje jednak duża liczba obserwacji nietypowych, następujących po sobie w niewielkich odstępach czasu, co na skutek nakładania się na siebie efektów kolejnych regresorów powoduje, że najlepiej przybliżane są one za pomocą zmiennych typu LS.

**Tabela 4.2.2. Charakterystyka reszt z modeli prognostycznych RegARIMA i TRAMO dla okresu 1997-2004**

Test	RegARIMA	TRAMO
	Poziom istotności	
Lata 1996-2004		
Normalność reszt		
Średnia	0,2496	0,3904
Skośność	0,1147	0,0459
Kurtoza	0,2153	0,0726
Test normalności	0,1437	0,0655
Niezależność		
Test Ljung-Boxa (24 opóźnienia)	0,3576	0,7218
Test Boxa-Pierce'a (24 opóźnienia)	0,6615	0,8653
Test Ljung-Boxa dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,0906	0,1636
Test Boxa-Pierce'a dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,2180	0,2717
Liniowość reszt		
Test Ljung-Boxa na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,3576	0,1984
Test Boxa-Pierce'a na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,6615	0,4461
Lata 2004-2011		
Normalność reszt		
Średnia	0,3978	0,3077
Skośność	0,6623	0,4812
Kurtoza	0,8326	0,7465
Normalność	0,6449	0,5366
Niezależność		
Test Ljung-Boxa (24 opóźnienia)	0,2833	0,0685
Test Boxa-Pierce'a (24 opóźnienia)	0,6821	0,3447
Test Ljung-Boxa dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,0113	0,0061
Test Boxa-Pierce'a dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,0555	0,0372
Liniowość reszt		
Test Ljung-Boxa na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,2833	0,0685
Test Boxa-Pierce'a na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,6821	0,3447

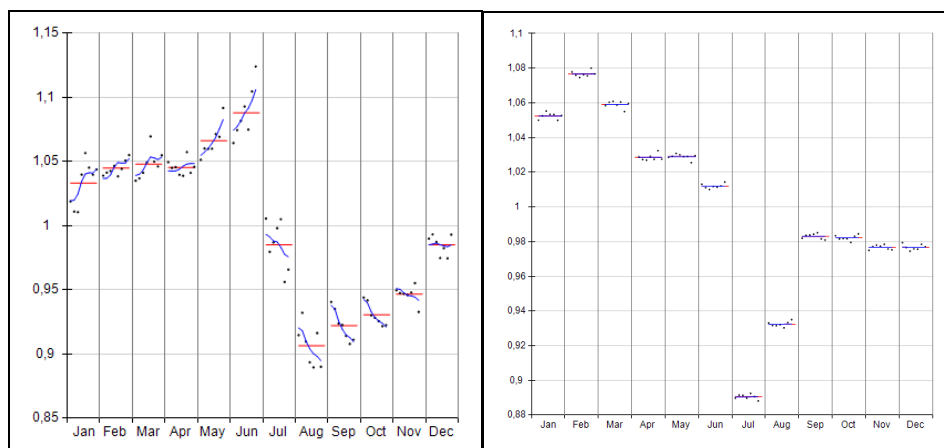
Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Wykonana diagnostyka reszt (tabela 4.2.2) sygnalizuje, że dla obu prób reszty z modeli RegARIMA i TRAMO mają rozkład normalny (jedynie w modelu TRAMO dla próby 1997-2004 na poziomie istotności 5% odrzucono hipotezę o skośności reszt zgodnej z rozkładem normalnym). Testy Ljung-Boxa i Boxa-Pierce'a na niezależność wykazały istnienie zależności pomiędzy opóźnieniami sezonowymi w resztach z drugiej z prób estymowanej za pomocą modelu TRAMO. Zachodzi również podejrzenie występowania istotnej korelacji opóźnień sezonowych reszt z modelu RegARIMA w latach 2004-2011. Te problemy ze spełnieniem wymagań nałożonych na modele wynikają prawdopodobnie z niskiej liczby dostępnych obserwacji. Dla wszystkich modeli liniowość reszt została zachowana.

## Analiza prawidłowości i diagnostyka dekompozycji szeregu czasowego

Porównanie wykresów wskaźników sezonowych w obu podpróbach (ryunki 4.2.3 i 4.2.4) potwierdza, że w okresie objętym badaniem miała miejsce istotna zmiana wzorca sezonowego. Czynnikiem, który najprawdopodobniej miał na to decydujący wpływ to zaniechanie interwencji na rynku żyta po przystąpieniu Polski do Unii Europejskiej.

**Rysunek 4.2.3. Czynniki sezonowy oszacowany za pomocą metody X-12-ARIMA dla okresu 1997-2004 (lewy) i 2004-2011 (prawy)**



Oznaczenia: czarny – wskaźnik SI, niebieski – czynniki sezonowy w danym okresie, czerwony – średnia wartość czynnika sezonowego dla danego okresu.

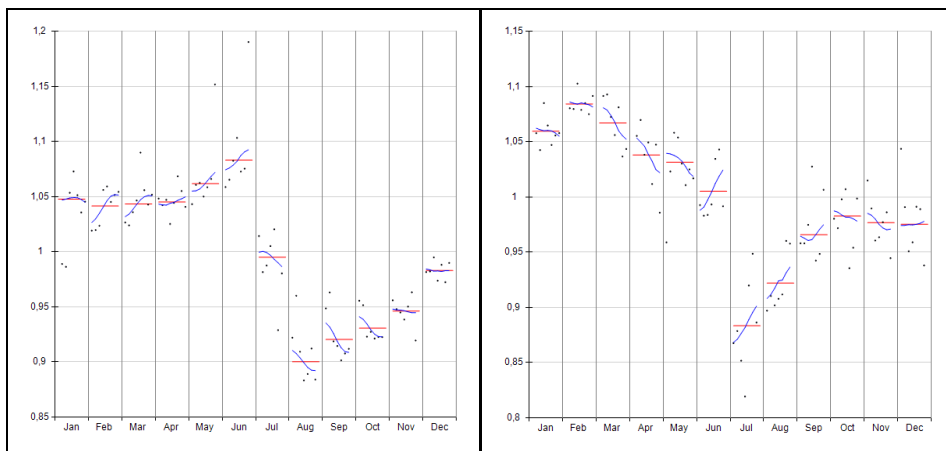
Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Dla okresu 1997-2004 sezonowy wzrost cen w pierwszych czterech miesiącach roku wynosił około +5%, natomiast w maju i czerwcu wzrastał do, odpowiednio, średnio +6% i +8% (rysunki 4.2.3 i 4.2.4). Czynniki sezonowy otrzymany każdą z metod dla lipca był bliski 1, co oznacza brak wpływu sezonowości na poziom cen. W pięciu ostatnich miesiącach roku miał miejsce sezonowy spadek cen od około -10% w sierpniu do -2% w grudniu. Komponent sezonowy został oszacowany za pomocą filtra średniej ruchomej 3 x 5.

Na skutek oddziaływania wspomnianych wcześniej czynników, sezonowy wzrost cen w pierwszych miesiącach roku w okresie 2004-2011 r. jest znacznie wyższy niż dla pierwszej podpróby. W lutym wynosi on średnio +8%, podczas gdy w latach 1997-2004 nie przekraczał +5%. Najniższe ceny obecnie obserwuje się w lipcu (-12%), podczas gdy we wcześniejszym okresie czynniki sezonowy dla tego miesiąca był neutralny. Wartości czynników sezonowych otrzymanych dla drugiej podpróby dla czerwca, lipca i sierpnia systematycznie rosną, co przemawia za występowaniem ruchomej sezonowości. Z tego powodu dla me-

tody X-12-ARIMA testowano zasadność zastosowania mieszanych filtrów sezonowych i ostatecznie wybrano dla sierpnia dłuższy filtr (3 x 9) niż dla pozostałych miesięcy (3 x 5).

**Rysunek 4.2.4. Czynniki sezonowy oszacowany za pomocą metody TRAMO/SEATS dla okresu 1997-2004 (lewy) i 2004-2011 (prawy)**



Oznaczenia: czarny – wskaźnik SI, niebieski – czynnik sezonowy w danym okresie, czerwony – średnia wartość czynnika sezonowego dla danego okresu.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Podsumowując, zaniechanie interwencji na rynku żyta wywołało wzrost amplitudy sezonowych zmian cen. O ile w latach 1997-2004 wynosiła ona średnio od -10% do +8%, to w okresie późniejszym sezonowe zmiany cen żyta zawierały się w przedziale -12% do +10%. Opisanie tendencje występują w obu metodach sezonowej korekty danych ze zbliżonym natężeniem.

Wyniki testów sezonowości zamieszczone w tabeli 4.2.3 potwierdzają występowanie prawidłowości zaobserwowanych podczas analizy graficznej wskaźników SI. Dla próby z lat 1997-2004 wykryto obecność ruchomej sezonowości, której przyczyną jest najprawdopodobniej występowanie dużej wariancji wskaźników SI. Wartości takie można zauważyć w m.in. wynikach X-12-ARIMA dla czerwca (rysunek 4.2.3). Porównując wartości SI dla odpowiednich miesięcy, można stwierdzić, że w drugiej próbie cechują się one niższą zmiennością. Szczególnie jest to widoczne dla wyników otrzymanych metodą TRAMO/SEATS. W konsekwencji dla drugiej próby odrzucona została hipoteza o występowaniu ruchomej sezonowości (w przypadku TRAMO/SEATS z prawdopodobieństwem ponad 80%). Łączny test sezonowości wskazuje, że w każdym z analizowanych przypadków możliwe było odróżnienie wahań sezonowych od zmian innych typów (sezonowość w szeregach czasowych została zi-

dentyfikowana). Wynik testu sezonowości rezydualnej wskazuje, że dla obu podprób zastosowanie metod X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS pozwoliło na całkowite wyeliminowanie wahań sezonowych, gdyż w szeregach wyrównanych sezonowo nie zidentyfikowano tego typu wahań.

**Tabela 4.2.3. Testy sezonowości dla wyników metod: X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS**

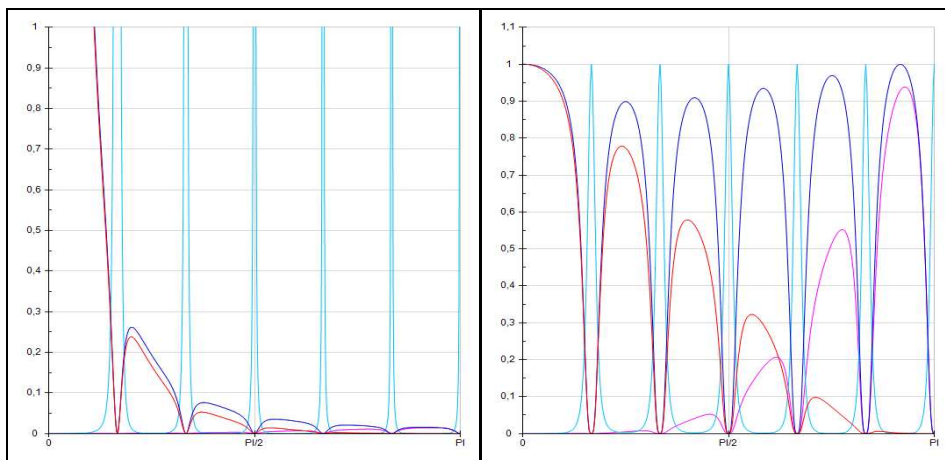
Test	X-12-ARIMA	TRAMO/SEATS
	Poziom istotności/wynik	Poziom istotności/wynik
Lata 2004-2011		
Test Friedmana	0,0000	0,0000
Test sezonowości ruchomej	0,0011 (występuje sezonowość ruchoma)	0,0000 (występuje sezonowość ruchoma)
Łączny test sezonowości	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym
Test sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej
Lata 2004-2011		
Test Friedmana	0,0000	0,0000
Test sezonowości ruchomej	0,1663 (brak sezonowości ruchomej)	0,8163 (brak sezonowości ruchomej)
Łączny test sezonowości	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym
Test sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej

Przyjęte poziomy istotności: Test Friedmana – 1%, Test sezonowości ruchomej – 20% , Test sezonowości rezydualnej – 10%, Łączny test sezonowości – patrz rozdział 3.

*Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.*

Funkcja gęstości spektralnej komponentu sezonowego otrzymanego metodą TRAMO/SEATS dla próby obejmującej lata 1997-2004 (rysunek 4.2.5, lewy) wykazuje stosunkowo szerokie piki, co świadczy o pewnej niestabilności tego składnika szeregu czasowego. Z tego powodu część zmienności w pobliżu częstości sezonowych została włączona do składnika sezonowego, na co wskazują grube podstawy odpowiedniej funkcji dla tego komponentu (rysunek 4.2.5, prawy).

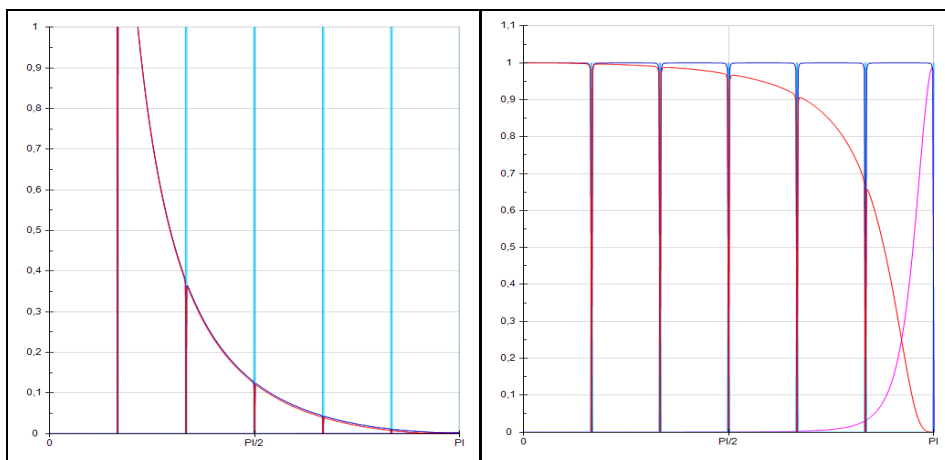
**Rysunek 4.2.5. Funkcje gęstości spektralnej estymatorów komponentów szeregu czasowego (lewy) i kwadraty charakterystyk częstotliwościowych estymatorów komponentów szeregu czasowego (prawy) metody TRAMO/SEATS dla lat 1997-2004**



Oznaczenia: czerwony – trend-cykl, niebieski – składnik sezonowy, różowy – komponent nieregularny, granatowy – szereg wyrównany sezonowo.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

**Rysunek 4.2.6. Funkcje gęstości spektralnej estymatorów komponentów szeregu czasowego (lewy) i kwadraty charakterystyk częstotliwościowych estymatorów komponentów szeregu czasowego (prawy) metody TRAMO/SEATS dla lat 2004-2011**



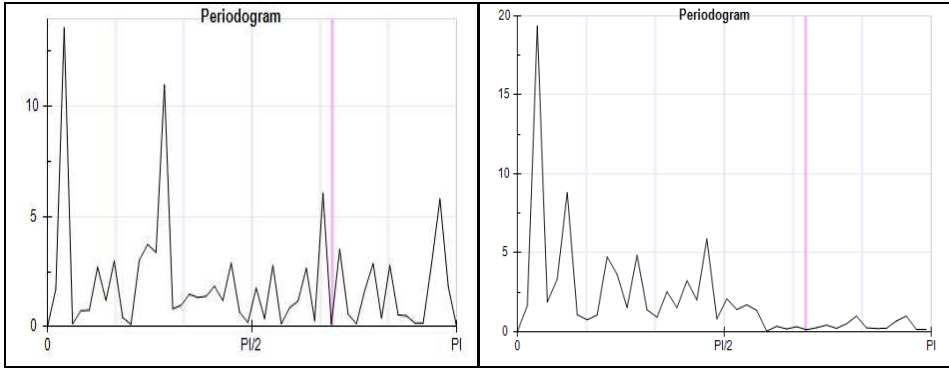
Oznaczenia: czerwony – trend, niebieski – składnik sezonowy, różowy – komponent nieregularny, granatowy – szereg wyrównany sezonowo.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Odmiennie właściwości estymatorów otrzymano dla próby z lat 2004-2011 r. Cechuje je skrajnie deterministyczny charakter, za czym przemawia sil-

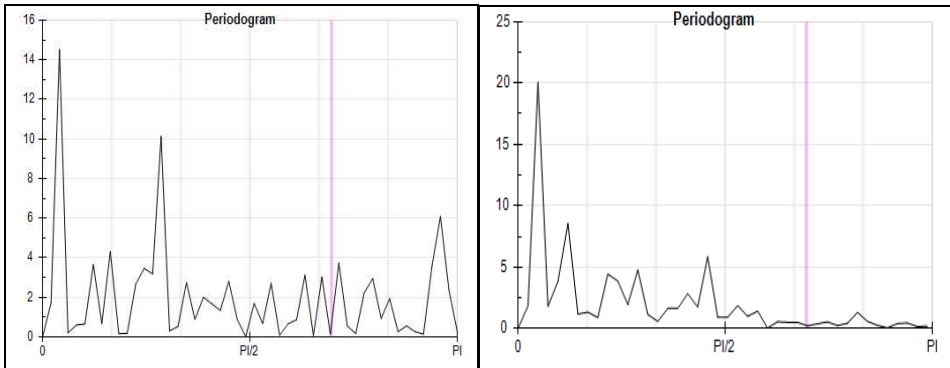
ne skoncentrowanie funkcji gęstości spektralnych wokół odpowiednich częstotliwości (rysunek 4.2.6, lewy). W rezultacie wariancja każdego z komponentów wynika jedynie ze zmienności obserwowanej dla tego składnika. Za takim wnioskiem jednoznacznie przemawia kształt podniesionych do potęgi drugiej charakterystyk częstotliwościowych uzyskanych dla estymatorów poszczególnych komponentów (rysunek 4.2.6, prawy).

**Rysunek 4.2.7. Periodogramy postaci stacjonarnej szeregu wyrównanego sezonowo metodami X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy) dla okresu 1997-2004**



Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

**Rysunek 4.2.8. Periodogramy postaci stacjonarnej szeregu wyrównanego sezonowo metodami X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy) dla okresu 2004-2011**



Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Dla obu metod wartość periodogramów dla sezonowo wyrównanego szeregu czasowego osiąga wartość maksymalną dla cyklu długości 46 miesięcy (rysunek 4.2.7). W danych pozbawionych czynnika sezonowego odpowiada ona za ok. 20% zmienności. Istotne znaczenie mają również wahania o krótszym okresie zmian (ok. 17 miesięcy), przy czym są one znacznie bardziej wyraźne



w przypadku danych otrzymanych po zastosowaniu metody TRAMO/SEATS niż X-12-ARIMA.

Periodogram dla wyrównanej sezonowo próby 1997-2004 wskazuje, że po zastosowaniu procedury X-12-ARIMA wahania sezonowe nadal występują (periodogram osiąga lokalne maksima dla częstości  $\frac{\pi}{6}$  i  $\frac{2\pi}{3}$ ), jednak są one na tyle niewielkie, że nie spowodowały zakwestionowania jakości otrzymanych wyników. Wyraźne są również wahania powtarzające się co 7 miesięcy oraz silne wahania nieregularne, o których świadczy lokalne maksimum o częstotliwości bliskiej  $\pi$  (rysunek 4.2.7, lewy). W przypadku zastosowania metody TRAMO/SEATS nie zaobserwowano pików dla częstości sezonowych.

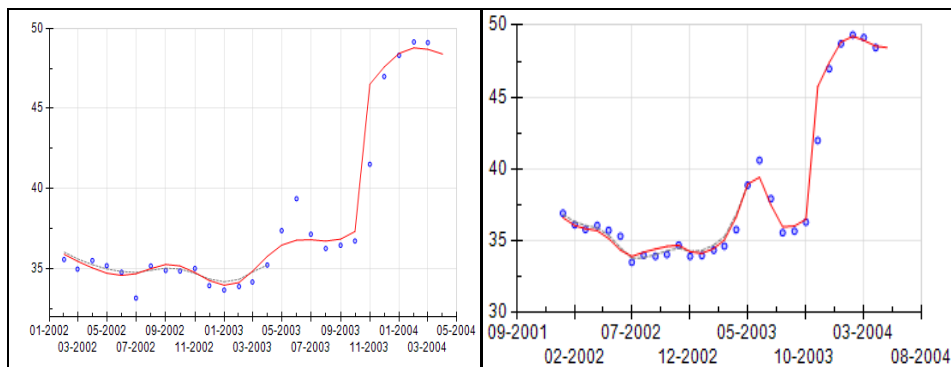
Różnice w sile i umiejscowieniu wahań cyklicznych wskazywanych przez obie metody są najprawdopodobniej pochodną małej liczby obserwacji, co wpływa na jakość estymacji modeli dekompozycji i oszacowania periodogramu.

Dla okresu 2004-2011 najsilniejsze wahania powtarzają się co 42 miesiące (rysunek 4.2.8). Może to wskazywać na skrócenie cyklu towarowego żyta po przystąpieniu Polski do Unii Europejskiej. Należy jednak pamiętać, że liczba obserwacji, na podstawie których wykonano to oszacowanie, jest niewielka, toteż rezultat ten wymaga weryfikacji w kolejnych latach. Podobnie jak we wcześniejszym okresie, zidentyfikowano również wahania o okresie zmian równym 17 miesięcy (por. wykres 4.2.6 i wykres 4.2.7). Z wyjątkiem czasu trwania najdłuższego cyklu towarowego, najbardziej istotne częstości wahań cyklicznych zidentyfikowane przez każdą z metod w obu próbach są identyczne.

Periodogramy otrzymane dla drugiej próby wskazują na całkowite oczyszczenie danych z wahań sezonowych. W przypadku metody TRAMO/SEATS zwraca uwagę występowanie znaczących wahań nieregularnych widocznych w postaci lokalnego maksimum o stosunkowo wysokiej amplitudzie w przedziale  $(\frac{5\pi}{6}, \pi)$ .

Ostatnie lata dla próby z lat 1997-2004 przypadały na okres wzmożonej zmienności cen żyta. Czynniki ten w sposób negatywny wpłynął na wynik historii rewizji trendu-cyklu (rysunek 4.2.9). Dla obu zastosowanych metod desezonalizacji pierwsze oszacowanie trendu-cyklu w czerwcu 2003 r. zostało po pewnym czasie skorygowane w dół. Należy zauważyć, że trend-cykl oszacowany metodą X-12-ARIMA jest bardziej wygładzony w stosunku do analogicznego wyniku dla TRAMO/SEATS. Wydaje się, że estymacja trendu-cyklu otrzymana metodą TRAMO/SEATS jest dla tego przypadku bardziej stabilna niż metodą X-12-ARIMA ze względu na większą zgodność pomiędzy pierwszymi a ostatecznymi oszacowaniami tego komponentu.

**Rysunek 4.2.9. Historia rewizji trendu-cyklu uzyskanego metodami: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy) dla okresu 1997-2004**

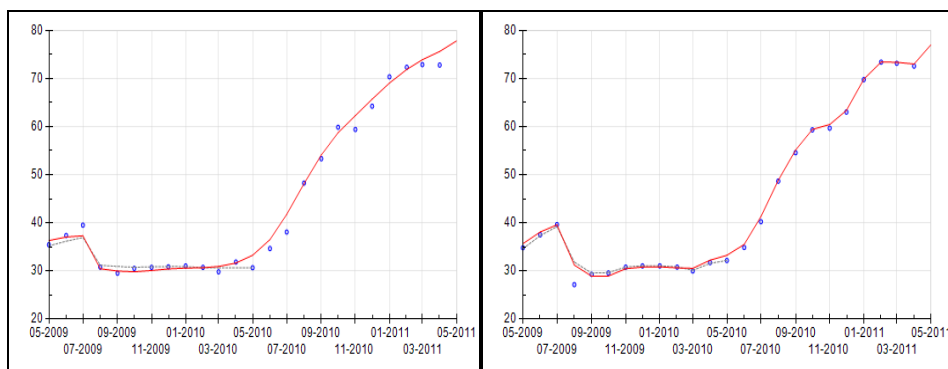


Oznaczenia: czerwony – oszacowanie ostateczne trendu-cyklu, niebieski – oszacowanie wstępne trendu-cyklu.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Również dla drugiej próby zastosowanie metody TRAMO/SEATS przyniosło nieco lepsze rezultaty niż X-12-ARIMA (rysunek 4.2.10). Dla obu metod znaczące rewizje miały miejsce jedynie w drugiej połowie 2009 r., gdy poziom cen żyta osiągnął lokalne minimum.

**Rysunek 4.2.10. Historia rewizji trendu-cyklu uzyskanego metodami: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy) dla okresu 2004-2011.**



Oznaczenia: czerwony – oszacowanie ostateczne trendu-cyklu, niebieski – oszacowanie wstępne trendu-cyklu.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Podobnie jak w przypadku cen pszenicy, dla cen żyta zdekomponowanych metodą X-12-ARIMA zanotowano istotną autokorelację składnika niere-

gularnego, mierzoną za pomocą miary  $M4^{48}$  (tabela 4.2.4). Wyeliminowanie autokorelacji nie było możliwe również dla alternatywnych specyfikacji modelu. Należy zauważyć, że brak autokorelacji komponentu nieregularnego jest pożądanym, ale nie niezbędnym do uzyskania prawidłowej dekompozycji szeregu czasowego [Guide to... 2007]. Wartości pozostałych statystyk  $M$  dla obu analizowanych podprób nie przekraczają wartości granicznej 1. Można zatem przyjąć, że komponenty otrzymane metodą X-12-ARIMA posiadają prawidłowe charakterystyki.

**Tabela 4.2.4. Miary jakości sezonowej korekty danych metody X-12-ARIMA**

Miara	Wartość statystyki testowej	
	lata 1997-2004	lata 2004-2011
M1	0,279	0,166
M2	0,031	0,065
M3	0,000	0,000
M4	1,345	0,665
M5	0,000	0,237
M6	0,291	0,015
M7	0,426	0,503
M8	0,567	0,402
M9	0,538	0,377
M10	0,613	0,509
M11	0,000	0,000
Q	0,347	0,270

*Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.*

Walidacja modeli TRAMO/SEATS wybranych dla obu podprób wykonana na podstawie oceny wariancji komponentów i ich estymatorów (tabela 4.2.5) oraz analizy współczynników korelacji (tabela 4.2.6) wykazała ich zgodność z założeniami teoretycznymi (por. rozdział 3.3). We wszystkich przypadkach wariancja estymatora teoretycznego była dostatecznie bliska wariancji estymatora empirycznego („estymacja”) (tabela 4.2.5). Wynik ten oznacza, że w procesie dekompozycji oryginalnego szeregu cen żyta otrzymano składowe o prawidłowych charakterystykach.

<sup>48</sup> Autokorelacja składnika nieregularnego cen żyta została zidentyfikowana tylko w podpróbie obejmującej lata 1997-2004.

**Tabela 4.2.5. Wariancja komponentów i ich estymatorów uzyskanych za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Komponent	Estymator teoretyczny	Estymacja	Poziom istotności
Okres 1997-2004				
Trend-cykl	0,4936	0,2452	0,2175	0,5735
Szereg skorygowany	1,9743	1,9616	1,5418	0,2497
Komponent sezonowy	0,0015	0,0000	0,0000	0,4191
Komponent nieregularny	0,2468	0,1226	0,0942	0,5006
Okres 2004-2011				
Trend-cykl	1,5660	1,5051	1,0465	0,1133
Szereg skorygowany	1,6388	1,6306	1,1254	0,0972
Komponent sezonowy	0,0030	0,0000	0,0000	0,7730
Komponent nieregularny	0,0121	0,0013	0,0011	0,6691

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Dla obu prób brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy o występowaniu korelacji pomiędzy komponentami (tabela 4.2.6). W każdym z przypadków współczynniki korelacji pomiędzy komponentami są bliskie zeru. Należy zatem przyjąć, że oszacowane składowe cen żyta są niezależne od siebie.

**Tabela 4.2.6. Korelacje między składowymi szeregów czasowych uzyskanymi za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Estymator teoretyczny	Estymacja	Poziom istotności
Okres 1997-2004			
Trend/Komponent sezonowy	-0,1162	-0,2032	0,3817
Trend/Komponent nieregularny	0,0686	0,0319	0,7663
Komp. sezonowy/Komp. nieregularny	0,0335	0,0524	0,5943
Okres 2004-2011			
Trend/Komponent sezonowy	-0,0206	-0,0529	0,7853
Trend/Komponent nieregularny	0,0000	-0,0298	0,8205
Komp. sezonowy/Komp. nieregularny	0,0074	0,0144	0,8908

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

## Podsumowanie

- Zmiany warunków ekonomicznych w związku z przystąpieniem Polski do Unii Europejskiej istotnie wpłynęły na proces generujący ceny żyta w Polsce. O ile do 2004 r. poziom cen był względnie stabilny i cechował się cyklami o mniejszej amplitudzie, to w okresie późniejszym obserwowane są silne średniokresowe wahania cykliczne.

- Do 2004 r. przeciętna długość dominującego cyklu towarowego wynosiła 46 miesięcy. Po przystąpieniu Polski do Unii Europejskiej cykl ten prawdopodobnie uległ skróceniu do 42 miesięcy, jednakże niewielka ilość dostępnych danych nie pozwala obecnie na stwierdzenie, czy tendencja ta ma charakter trwały. Ceny żyta, podobnie jak ceny pszenicy podlegają również fluktuacjom w cyklu 17 miesięcy, jednakże są one znacznie słabsze od głównych wahań koniunkturalnych.
- Od 2004 r. wahania sezonowe są stabilne. Średnie zmiany cen w obrębie jednego roku wywołane czynnikami sezonowymi wynoszą około 20%. Szczytowy poziom osiągany jest w lutym (108% przeciętnego poziomu cen w roku), a minimalny w lipcu (spadek cen w stosunku do średniorocznych przeciętnie o 12%).
- Zmiany cen żyta w pobliżu punktów zwrotnych trendu-cyklu są zwykle tak wysokie, że powodują wystąpienie nieliniowości w modelu i powinny być traktowane jako obserwacje nietypowe. To w negatywny sposób wpływa na jakość prognoz żyta wynikających z modeli X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS, gdyż trend-cykl jest dominującym składnikiem tego szeregu czasowego.
- Oszacowane na etapie wstępnej analizy danych modele RegARIMA oraz TRAMO umożliwiły identyfikację i oszacowanie siły oddziaływania licznych obserwacji nietypowych. Wykonana dekompozycja ujawniła kluczowe charakterystyki szeregu cen żyta.
- Modele prognostyczne zasadniczo spełniają większość wymagań stawianych modelom ekonometrycznym, jednakże zmiany struktury szeregu czasowego powodują, że prognozowanie na ich podstawie jest obarczone wyższym ryzykiem niż prognozowanie cen pszenicy.

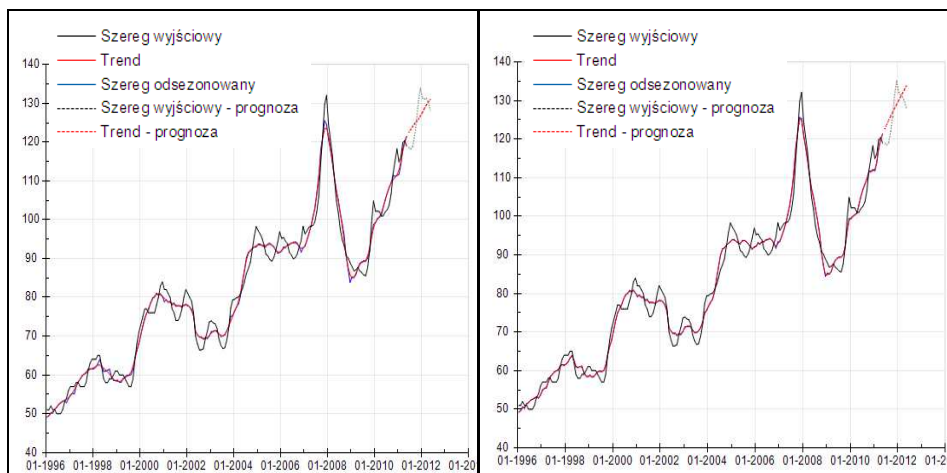
### 4.3. Ceny mleka

Ceny skupu mleka w latach 1996-2011 wykazują długookresowy trend wzrostowy, na który nakładają się średniookresowe cykle towarowe (rysunek 4.3.1). Poziom cen mleka jest bowiem wynikiem oddziaływania szeregu czynników popytowo-podażowych oraz regulacji prawnych tego rynku. Ceny krajowe są również silnie powiązane z cenami w innych krajach UE oraz na świecie z uwagi na duży udział eksportu produktów przetworzonych. Długookresowy trend wzrostowy cen nominalnych jest determinowany przez czynniki inflacyjne oraz tendencje światowe. Ceny mleka podlegają zarówno wahanom sezonowym, jak i mniej lub bardziej regularnym cyklom towarowym.

## Modele prognostyczne

Nietypowy spadek cen mleka w maju 2002 r. był wynikiem zwiększonej podaży tego surowca do skupu<sup>49</sup>. W obu modelach na etapie wstępnej estymacji – TRAMO i RegARIMA – przyjęto, że obniżenie poziomu cen miało trwały charakter (tabela 4.3.1). Analiza przebiegu zmienności szeregu wskazuje, że ceny mleka znalazły się ponownie w trendzie wzrostowym wraz z przystąpieniem Polski do Unii Europejskiej (rysunek 4.3.1). Od 2004 r. na produkcję mleka obowiązują limity produkcyjne w postaci tzw. kwot mlecznych. Na rynku mleka dochodzi również do regularnych interwencji Agencji Rynku Rolnego, polegających na m.in. skupie/sprzedży masła i mleka w proszku, dopłatach do prywatnego przechowywania masła i do produkcji mleka w proszku.

**Rysunek 4.3.1. Ceny mleka w Polsce w latach 1996-2011 (zł/100 l). Szereg wyjściowy oraz szacunki trendu i danych wyrównanych sezonowo na podstawie modeli X-12-ARIMA (lewy) oraz TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Po okresie stabilizacji przypadającym na lata 2005-2006 ceny mleka uległy gwałtownemu wzrostowi, osiągając w końcu 2007 r. rekordowy poziom 132 zł za 100 litrów (rysunek 4.3.1). Sytuacja ta była wynikiem ogromnego popytu na mleko i jego przetwory przy jednoczesnym niedoborze tego surowca na rynku. Wzrost cen był windowany przez zwiększony eksport, głównie mleka w proszku i masła. Na początku 2008 r. nastąpiło nagle przejście do spadkowej fazy cyklu towarowego. Nadprodukcja mleka na krajowym rynku oraz wysoki

<sup>49</sup> Według szacunków Agencji Rynku Rolnego spadek cen mleka w pierwszej połowie 2002 r. wynikał ze wzrostu podaży mleka i wynosił od 0,7% do 3,5% miesięcznie.

kurs złotego spowodował poważne problemy ze zbytem i w konsekwencji spadek cen.

**Tabela 4.3.1. Parametry modeli RegARIMA i TRAMO**

Parametr	RegARIMA		TRAMO	
	Wartość/ odchylenie standardowe	Statystyka t/ poziom istotności	Wartość/ odchylenie standardowe	Statystyka t/ poziom istotności
AR(1)	-0,6616/0,0548	-12,08/0,0000	-0,5239/0,0765	-6,85/0,0000
AR(2)			-0,1890/0,0769	-2,46/0,0149
SAR(1)			0,2689/0,0975	2,76/0,0065
SMA(1)	0,8154/0,0464	-17,59/0,0000	-0,6987/0,0853	-8,20/0,0000
LS [5.2002]	-0,0396/0,0122	-3,24/0,0014	-0,0465/0,0120	-3,86/0,0002

Specyfikacja modelu: RegARIMA – (1,1,0)(0,1,1), TRAMO – (2,1,0)(1,1,1).

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Analiza reszt z modelu RegARIMA wykazała normalność ich rozkładu (tabela 4.3.2). W przypadku modelu oszacowanego przez TRAMO otrzymano nadmierną kurtozę rozkładu, w wyniku czego na 5% poziomie ufności należy odrzucić hipotezę o normalności rozkładu reszt. Reszty z obu modeli cechuje przypadkowość. Wyniki testów Ljung-Boxa i Boxa-Pierce'a na kwadratach reszt wskazują na liniowość reszt.

**Tabela 4.3.2. Charakterystyka reszt z modeli prognostycznych RegARIMA i TRAMO**

Test	RegARIMA	TRAMO
	Statystyka testowa	
Normalność reszt		
Średnia	0,8113	0,8588
Skośność	0,7889	0,6349
Kurtoza	0,2172	0,0145
Test normalności	0,2440	0,0228
Niezależność		
Test Ljung-Boxa (24 opóźnienia)	0,3587	0,7482
Test Boxa-Pierce'a (24 opóźnienia)	0,4635	0,8309
Test Ljung-Boxa dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,1296	0,6937
Test Boxa-Pierce'a dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,1681	0,7458
Liniowość reszt		
Test Ljung-Boxa na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,1921	0,2228
Test Boxa-Pierce'a na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,2803	0,3081

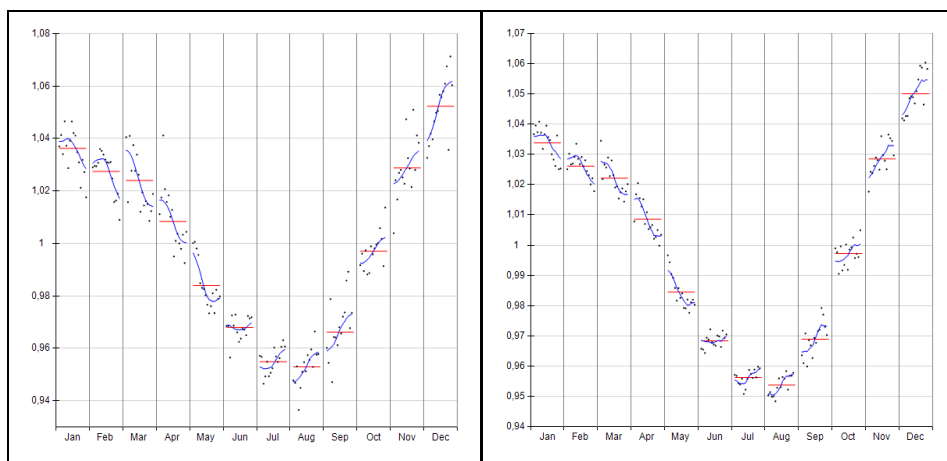
W sekcji „Normalność reszt” przytoczono poziom istotności dla testu normalności Doornika-Hansena, a także poziomy istotności dla testów zbieżności wartości skośności i kurtozy z wartościami charakterystycznymi dla rozkładu normalnego oraz testu zerowej średniej reszt.

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

## Analiza prawidłowości i diagnostyka dekompozycji szeregu czasowego

Wpływ śródrocznych wahań wielkości produkcji mleka na ceny jest dobrze widoczny w zmianach, jakim podlegają wartości wskaźników SI (rysunek 4.3.2). W styczniu poziom cen jest wyższy od średniorocznego o około 4%. W kolejnych miesiącach roku na skutek wzrostu produkcji efekt ten stopniowo zanika. Od maja do października ceny mleka znajdują się poniżej średniej rocznej, osiągając minimum w sierpniu. Najwyższy poziom cen w ciągu roku notowany jest w grudniu.

**Rysunek 4.3.2. Czynniki sezonowy oszacowany za pomocą metod: X-12-ARIMA (prawy) i TRAMO/SEATS (lewy)**



Oznaczenia: czarny – wskaźnik SI, niebieski – czynnik sezonowy w danym okresie, czerwony – średnia wartość czynnika sezonowego dla danego okresu.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Porównanie oszacowań wykonanych dwiema metodami dla każdego z okresów wskazuje na większą koncentrację wartości wskaźników SI w TRAMO/SEATS niż w X-12-ARIMA. Uogólniając, dla danego okresu wpływ czynników sezonowych na ceny mleka w kolejnych latach jest względnie bardziej stabilny w modelu oszacowanym metodą TRAMO/SEATS niż X-12-ARIMA. Relatywne rozproszenie wskaźników SI w obrębie każdego miesiąca było powodem, dla którego do estymacji czynnika sezonowego metodą X-12-ARIMA wybrano filtr (3x9). Do oszacowania trendu-cyklu zastosowano 9-okresowy filtr Hendersona. Jego długość świadczy o dominacji trendu-cyklu nad składnikiem nieregularnym (por. rozdz. 4.1).

Wyniki testów przedstawionych w tabeli 4.3.3 wskazują na występowanie stabilnej sezonowości w szeregu czasowym oczyszczonym z wpływu obserwacji



nietypowych. Obie metody doprowadziły do całkowitej eliminacji składnika sezonowego z danych. Rezultaty są zgodne dla obu zastosowanych algorytmów.

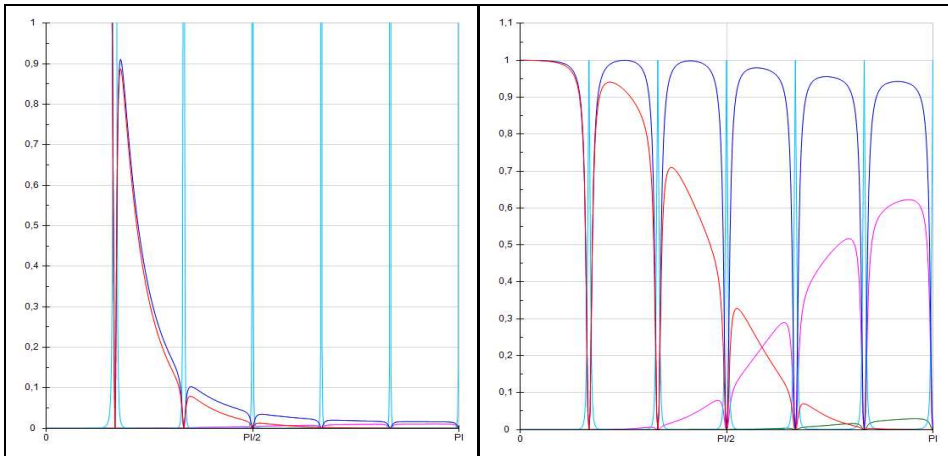
**Tabela 4.3.3. Testy sezonowości dla wyników metod: X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS**

Test	X-12-ARIMA	TRAMO/SEATS
	Poziom istotności/wynik	Poziom istotności/wynik
Test Friedmana	0,0000	0,0000
Test sezonowości ruchomej	0,1062 (Brak sezonowości ruchomej)	0,5002 (Brak sezonowości ruchomej)
Łączny test sezonowości	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym
Test sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej

W tabeli podano wartości statystyk testowych. Przyjęte poziomy istotności: Test Friedmana – 1%, Test sezonowości ruchomej – 20%, Test sezonowości rezydualnej – 10%, Łączny test sezonowości – patrz rozdział 3.

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

**Rysunek 4.3.3. Funkcje gęstości spektralnej estymatorów komponentów szeregu czasowego (lewy) i kwadraty charakterystyk częstotliwościowych estymatorów komponentów szeregu czasowego (prawy) dla metody TRAMO/SEATS**



Oznaczenia: czerwony – trend-cykl, niebieski – składnik sezonowy, różowy – komponent nieregularny, zielony – czynnik przejściowy, granatowy – szereg wyrównany sezonowo.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

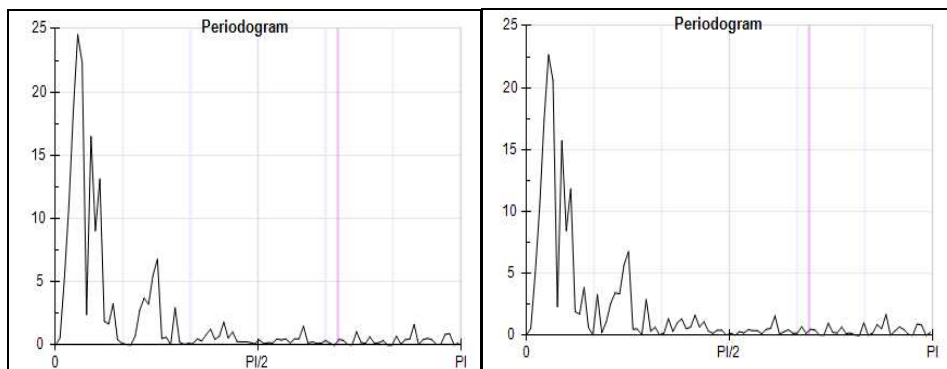
Wąskie piki sezonowe widoczne na wykresie funkcji gęstości spektralnej komponentu sezonowego otrzymanego metodą TRAMO/SEATS świadczą o nielosowości tego składnika szeregu czasowego (rysunek 4.3.3, lewy). W trendzie-cyklu zostały uwzględnione głównie wahania występujące z częstością mniejszą niż 4 razy do roku (czyli znajdujące się w przedziale  $(0, \frac{\pi}{2})$ ) z wyłączeniem częstości sezonowych. Około 60% wahań o wysokiej częstości

znalazło się w składniku nieregularnym. Z szeregów czasowych cen mleka oszacowanych metodą TRAMO/SEATS wyodrębniono również składnik przejściowy, na który składają się wahania krótkookresowe, niemające charakteru białego szumu.

Analiza szeregu wyrównanego sezonowo obiema metodami w dziedzinie częstości wskazuje na dominację wahań średnio- i długookresowych (wartości periodogramów na rysunku 4.3.4 są najwyższe w przedziale  $(0, \frac{\pi}{6})$ ). Najbardziej wyraźny cykl zmian cen ma długość 37 miesięcy, jednakże należy zauważyć, że odpowiadający mu pik jest szeroki, rozciągając się na wartość oznaczającą 35 miesięcy. Wynika stąd, że długość cyklu koniunkturalnego mleka ma charakter stochastyczny i nie może być precyzyjnie wyznaczona przy danej liczbie obserwacji.

O obecności niesezonowych wahań o cyklu nieznacznie krótszym niż rok świadczy obecność lokalnego maksimum w przedziale  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ . Dla pozostałych częstości znajdujących się powyżej  $\pi$ , periodogram przyjmuje bardzo niskie wartości. Oznacza to, że ceny mleka determinują wahania średnio- i długookresowe.

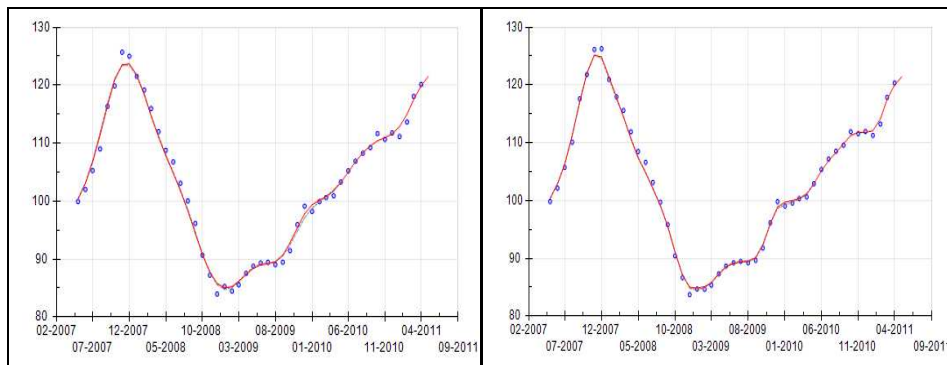
**Rysunek 4.3.4. Periodogramy postaci stacjonarnej szeregu wyrównanego sezonowo metodami X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



*Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.*

Liczba obserwacji niestabilnych, czyli takich, których wartość podlegała znaczącym rewizjom, była niewielka (rysunek 4.3.5). Dla obu zastosowanych metod zostały one zidentyfikowane w grudniu 2007 r. i czerwcu 2008 r. Wielkość rewizji była nieznacznie większa dla szacunków otrzymanych metodą X-12-ARIMA.

**Rysunek 4.3.5. Historia rewizji trendu-cyklu uzyskanego metodami: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



Oznaczenia: czerwony – oszacowanie ostateczne trendu-cyklu, niebieski – oszacowanie wstępne trendu-cyklu.

Źródło: opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Zestawione w tabeli 4.3.4 wartości miar jakości desezyzacji metodą X-12-ARIMA wskazują, że charakterystyki otrzymanych składników szeregu czasowego i zależności między nimi są całkowicie zgodne z założeniami teoretycznymi. Jak wskazano w rozdziale trzecim, za wartości akceptowalne uznaje się te, które nie przekraczają jedności. Żadna ze statystyk przedstawionych w tabeli 4.3.4 nie zbliżyła się do tej granicy. Wartość ogólnej miary jakości wyrażonej przez statystykę Q jest również niska.

**Tabela 4.3.4. Miary jakości sezonowej korekty danych dla metody X-12-ARIMA**

Miara	Wartość statystyki testowej	Miara	Wartość statystyki testowej
M1	0,086	M7	0,170
M2	0,018	M8	0,297
M3	0,000	M9	0,273
M4	0,272	M10	0,296
M5	0,000	M11	0,000
M6	0,214	Q	0,136

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Rezultaty analizy wariancji zawarte w tabeli 4.3.5 pozwalają na przyjęcie założenia, że komponenty zostały wyestymowane prawidłowo. Dla każdego z nich wariancja estymatora teoretycznego i empirycznego („estymacja”) jest do siebie zbliżona. Wynika stąd, że w żadnym przypadku nie popełniono błędu niedoszacowania ani przeszacowania. Komponenty wynikowe cechują się zatem założonymi charakterystykami.

**Tabela 4.3.5. Wariancja komponentów i ich estymatorów uzyskanych za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Komponent	Estymator teoretyczny	Estymacja	Wartość statystyki testowej
Trend-cykl	0,4263	0,2826	0,2701	0,7495
Szereg skorygowany	1,0079	0,9054	0,8434	0,5544
Komponent sezonowy	1,1512	0,0202	0,0100	0,3891
Komponent nieregularny	0,0835	0,0277	0,0252	0,5132
Komponent przejściowy	0,0047	0,0003	0,0003	0,7656

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Współczynniki korelacji pomiędzy komponentami szeregu czasowego uzyskanymi na podstawie metody TRAMO/SEATS są stosunkowo niskie (tabela 4.3.6). Najwyżej skorelowane ze sobą składniki to trend-cykl i sezonowość, ale i tu współczynnik korelacji nie przekracza 0,12, tak więc siła tej zależności jest niewielka. Wartości statystyki testowej wskazują, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o braku korelacji między składowymi szeregu cen mleka. Założenia nałożone na model zostały zatem spełnione.

**Tabela 4.3.6. Korelacje między składowymi szeregów czasowych uzyskanymi za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Estymator teoretyczny	Estymacja	Wartość statystyki testowej
Trend-cykl/Komponent sezonowy	-0,1163	-0,1381	0,8352
Trend-cykl/Komponent nieregularny	0,1046	-0,0037	0,1173
Komp. sezonowy/Komp. nieregularny	0,0270	0,0538	0,1319
Trend-cykl/Komponent przejściowy	-0,0384	0,0817	0,0011
Komp. sezonowy/Komp. przejściowy	0,0270	0,0396	0,2417

Źródło: opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

## Podsumowanie

- W latach 1996-2011 nominalne ceny mleka charakteryzują się długookresowym wzrostem. Wynika on z ogólnych procesów inflacyjnych oraz tendencji obserwowanych na rynkach światowych. Przeciętna długość zmian cyklicznych wynosi około 35-37 miesięcy.
- Wzorzec wahań sezonowych mleka jest stabilny w czasie. Amplituda zmian sezonowych wynosi przeciętnie 10 p.p. Najniższy poziom cen mleka w roku jest obserwowany w miesiącach letnich (czerwiec, lipiec, sierpień), a maksymalny w grudniu (ok. 105% przeciętnego poziomu zjawiska w roku).
- Zarówno dla metody X-12-ARIMA, jak i TRAMO/SEATS uzyskano stabilne i wiarygodne oszacowania. Oszacowane modele umożliwiły identyfikację

kluczowych prawidłowości i okazały się poprawne pod względem własności statystycznych.

- Ceny mleka charakteryzują się wysoką przewidywalnością w porównaniu do cen zbóż, gdyż krótkookresowe zmiany niesezonowe są relatywnie niewielkie, a obserwacje o charakterze nietypowym występują sporadycznie. Czynnikiem sprzyjającym budowaniu dobrych modeli prognostycznych cen mleka jest stabilność wzorca wahań sezonowych.
- Oszacowane modele prognostyczne cen mleka wyjaśniają wszystkie prawidłowości systematyczne obserwowane w cenach. Spełniają tym samym podstawowe warunki stawiane modelom statystycznym.

## 5. Analiza i modele szeregów czasowych cen skupu żywca

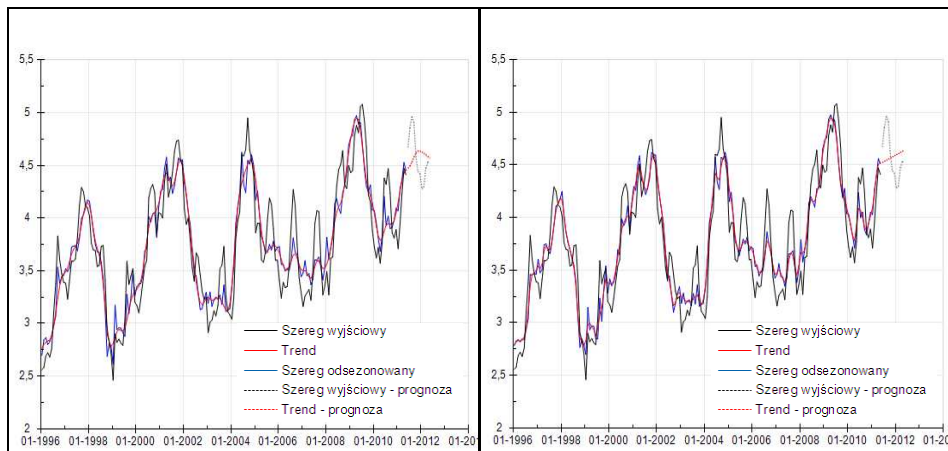
Niniejszy rozdział przybliży najważniejsze właściwości szeregów czasowych miesięcznych cen skupu żywca wieprzowego, drobiowego i wołowego. Stanowi on drugą część badań empirycznych i jest przeprowadzony z wykorzystaniem tych samych narzędzi analitycznych, które przedstawiono w rozdziale 4. Analizy przeprowadzono w programie Demetra+ z wykorzystaniem metod X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS. Schemat opisów poszczególnych rynków jest zbliżony do układu zastosowanego w rozdziale 4. Najpierw opisano modele prognostyczne, a następnie prawidłowości uzyskane na podstawie dekompozycji przy wykorzystaniu ww. procedur.

### 5.1. Ceny żywca wieprzowego

Ceny nominalne trzody chlewnej w ostatnich 15 latach charakteryzowały się wyraźnym trendem wzrostowym wynikającym z ogólnych procesów inflacyjnych oraz wahaniami cyklicznymi wokół tego trendu. Analiza rysunku 5.1.1 pozwala na orientacyjną ocenę długości tych cykli (ok. 4 lat). Są to tzw. „cykle świńskie”, niezależne od ogólnogospodarczych cykli koniunkturalnych, wywołane przez niestabilność opłacalności chowu przy niskiej elastyczności cenowej i dochodowej popytu oraz przy relatywnej sztywności podaży w krótkim okresie (tj. opóźnieniu czasowym przystosowania wielkości podaży do zmieniających się warunków opłacalności chowu – por. [Hamulczuk 2006]).

Wydaje się, że komponent trend-cykl wyróżniony metodą TRAMO/SEATS jest nieco mniej wygładzony niż ten wynikający z dekompozycji ARIMA-X-12. Wynika to z metody estymacji: w X-12-ARIMA stosowane są średnie ruchome, tymczasem dekompozycja TRAMO/SEATS opiera się na charakterystykach modelu ARIMA. Jednocześnie jednak dekompozycja metodą TRAMO/SEATS doprowadziła do ekstrakcji komponentu nieregularnego o większej wariancji niż dekompozycja metodą alternatywną. Wokół wahań długookresowych obserwować można również zmienność krótkookresową związaną z sezonowością oraz z innymi, nieregularnymi czynnikami. Składniki sezonowe wykazują tendencję do zwiększania w czasie swojej amplitudy. Pomimo to, zaimplementowane w obydwu metodach algorytmy doboru postaci modelu (addytywna czy multiplikatywna) preferowały w przypadku szeregu cen trzody strukturę addytywną.

**Rysunek 5.1.1. Ceny żywca wieprzowego w Polsce w latach 1996-2011 (zł/kg). Szereg wyjściowy oraz szacunki trendu i danych wyrównanych sezonowo na podstawie modeli: X-12-ARIMA (lewy) oraz TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

### Modele prognostyczne

Do opisu zachowania cen żywca wieprzowego, a w konsekwencji do prognozowania, oszacowano dwa modele, których parametry przedstawiono w tabeli 5.1.1. Modele te zostały dobrane według automatycznej procedury opisanej w rozdziale 3. Obydwa mają taką samą strukturę: jeden regresor reprezentujący sezonową średnią ruchomą oraz jeden regresor opisujący tzw. efekt Wielkanocy. Wszystkie oszacowane współczynniki modeli są statystycznie istotne na poziomie istotności  $p=0,1$ .

**Tabela 5.1.1. Parametry modeli RegARIMA i TRAMO**

Parametr	RegARIMA		TRAMO	
	Wartość/ odchylenie standardowe	Statystyka t / poziom istotności	Wartość/ odchylenie standardowe	Statystyka t / poziom istotności
SMA(1)	-0,8350/0,0532	-15,70/0,0000	-0,8363/0,0418	-20,01/0,0000
Efekt Wielkanocy	0,0715/0,0411	1,74/0,0836	0,0715/0,0411	1,74/0,0837

Specyfikacja modeli: RegARIMA – (0,1,0)(0,1,1), TRAMO – (0,1,0)(0,1,1).

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Linearyzacja szeregu, przeprowadzana przez obydwie metody, dokonała się bez potrzeby wyodrębniania obserwacji odstających. Zachowanie szeregu było na tyle regularne, że jakość modelu oraz dekompozycji była zadowalająca bez wprowadzania dodatkowych zmiennych deterministycznych. Jedynym efektem kalendarzowym, który z przyczyn ekonomicznych powinien zostać włączony

ny, oraz którego obecność została potwierdzona na 10% poziomie istotności, jest efekt Wielkanocy (zob. tabela 5.1.1). W okresie tym ceny żywca wieprzowego wydają się być systematycznie wyższe o nieco ponad 70 groszy/kg, przede wszystkim z powodu wzmożonego popytu na mięso. Niektóre statystyki diagnostyczne modeli (w tym testy oparte na spektrum autoregresyjnym) wskazywałyby również na potencjalny wpływ efektu liczby dni tygodnia na poziom cen, jednakże bezpośrednia estymacja siły tego efektu prowadziła do wyodrębnienia zmiennej nieistotnej statystycznie, a brak ewidentnych przesłanek ekonomicznych spowodował, że zmienną tej do modelu nie włączono.

Oszacowane modele prognostyczne poddano weryfikacji mającej na celu ocenę ich jakości z uwagi na wymagania stawiane modelom ekonometrycznym. Najważniejsze z nich dotyczą rozkładu składnika losowego. Wyniki te zawarto w tabeli 5.1.2.

**Tabela 5.1.2. Charakterystyka reszt z modeli prognostycznych RegARIMA i TRAMO**

Test	RegARIMA	TRAMO
	Poziom istotności	
Normalność reszt		
Srednia	0,5219	0,5213
Skośność	0,2179	0,2173
Kurtoza	0,4115	0,4114
Test normalności	0,3033	0,3029
Niezależność		
Test Ljung-Boxa (24 opóźnienia)	0,0101	0,0102
Test Boxa-Pierce'a (24 opóźnienia)	0,0229	0,0232
Test Ljung-Boxa dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,5581	0,5657
Test Boxa-Pierce'a dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,6028	0,6099
Liniowość reszt		
Test Ljung-Boxa na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,3548	0,3539
Test Boxa-Pierce'a na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,4787	0,4778

W sekcji „Normalność reszt” przytoczono poziom istotności dla testu normalności Doornika-Hansena, a także poziomy istotności dla testów zbieżności wartości skośności i kurtozy z wartościami charakterystycznymi dla rozkładu normalnego oraz testu zerowej średniej reszt.

*Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.*

Reszty z modeli X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS mają rozkład normalny (por. tabela 5.1.2). Niestety, zarówno test Ljung-Boxa, jak i test Boxa-Pierce'a, wskazują na występowanie autokorelacji składników losowych modeli wyestymowanych obydwoma metodami. Z niezamieszczanych w niniejszym tekście wykresów ACF i PACF wynika, że przyczyną niekorzystnego wyniku testu było nieuwzględnienie w modelu opóźnień rzędu 3 i 10. Jednak procedura doboru postaci modelu, zaimplementowana w procedurach X-12-ARIMA oraz TRA-



MO/SEATS i oparta na kryteriach informacyjnych, wskazała na te modele jako najlepsze.

Reszty modeli nie wykazują zależności nieliniowych (efektu ARCH) dla pierwszych 24 opóźnień. Hipoteza zerowa mówiąca o tym, że kwadraty reszt zależą od poprzednich kwadratów reszt została więc odrzucona.

### **Dekompozycja szeregu czasowego: prawidłowości i diagnostyka**

Z analitycznego i prognostycznego punktu widzenia ważne jest opisanie najważniejszych prawidłowości występujących w szeregach czasowych cen surowców rolnych. Szczególną rolę odgrywają tutaj wahania sezonowe i wahania cykliczne.

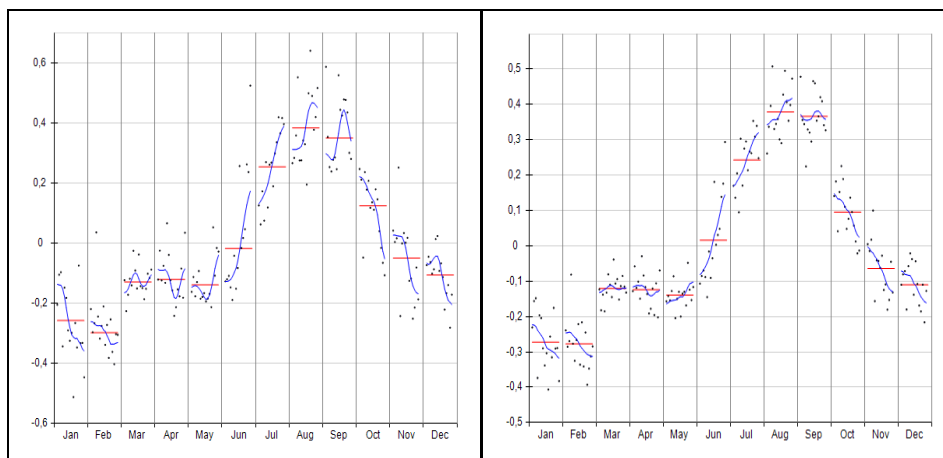
Sezonowość w cenach trzody chlewnej jest bardzo wyraźna (zob. rysunek 5.1.2). Silne dodatnie odchylenia cen od trendu można zaobserwować głównie w miesiącach letnich (lipiec, sierpień) oraz wczesną jesienią (wrzesień). Maksymalne średnie odchylenie dla danych obejmujących ostatnie 15 lat zaobserwowano w przypadku sierpnia, kiedy to ceny żywca kształtują się na poziomie wyższym niż przeciętnie o 38 groszy/kg. Ceny relatywnie niższe niż przeciętnie w roku (choć o mniejszym średnim bezwzględnym odchyleniu od trendu niż odchylenia dodatnie) występują w miesiącach zimowych i na wiosnę. Minimalne średnie odchylenie (luty) wynosi -28 groszy/kg wg TRAMO/SEATS oraz -30 groszy/kg wg X-12-ARIMA. Tak wyraźne wahania cen w poszczególnych miesiącach roku mogą mieć związek z sezonowymi fluktuacjami cen pasz, które są droższe zimą i wiosną. Efekt ten może znajdować swoje odzwierciedlenie we wzroście cen żywca w okresie letnim. Drugi czynnik, który potencjalnie wpływa na sezonowy wzrost cen żywca wieprzowego, to wzmożony popyt konsumpcyjny na mięso w okresie letnim (jest to tzw. sezon grillowy).

Na wykresie czynnika sezonowego (rysunek 5.1.2) widać również wyraźną zmianę wzorca sezonowego, która może wynikać zarówno ze zmian wzorca konsumpcji finalnej (upowszechnianie się wyżej wspomnianej letniej konsumpcji), jak i ze zmian zachodzących w cyklu produkcyjnym świń (jego skracanie się). Również integracja z UE mogła przyczynić się do zmiany wzorców sezonowych na skutek zniesienia ograniczeń handlowych. Ważną rolę może odgrywać tutaj rosnący import prosiąt.

W czerwcu na początku próby ceny były średnio niższe, zaś w drugiej części próby stały się one wyraźnie wyższe od średniej. Dla października obserwuje się ewolucję czynnika sezonowego w przeciwnym kierunku (z odchylen dodatnich na ujemne). Widzimy również wzmocnienie zmian sezonowych

w lipcu (ceny coraz wyższe) oraz w listopadzie, grudniu i styczniu (ceny coraz niższe od średniej). Czynniki sezonowy na wiosnę jest relatywnie najstabilniejszy.

**Rysunek 5.1.2. Czynniki sezonowy (zł/kg) oszacowany za pomocą metod: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Generalnie, estymacja metodą TRAMO/SEATS dała składnik sezonowy stabilniejszy aniżeli metoda ARIMA-X-12. Poszczególne obserwacje są bardziej skupione wokół sezonowych średnich. Tezę tę potwierdza również formalny test sezonowości ruchomej (zob. tabela 5.1.3). Dla ARIMA-X-12 test ten wskazuje na występowanie sezonowości ruchomej, podczas gdy dla TRAMO/SEATS ma on wynik negatywny. Dla obydwu metod testy formalne jednoznacznie potwierdziły występowanie sezonowości w szeregu czasowym oraz dobrą jakość wyównania sezonowego w postaci braku sezonowości w szeregu odsezonowanym.

**Tabela 5.1.3. Testy sezonowości dla wyników metod: X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS**

Test	X-12-ARIMA	TRAMO/SEATS
	Poziom istotności / wynik	Poziom istotności / wynik
Test Friedmana	0,0000	0,0000
Test sezonowości ruchomej	0,0079 (występuje sezonowość ruchoma)	0,3439 (nie występuje sezonowość ruchoma)
Łączny test sezonowości	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym
Test sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej

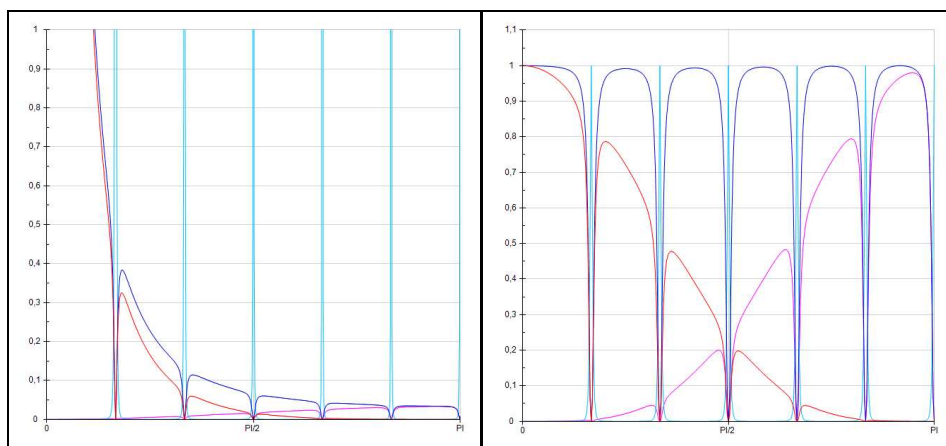
W tabeli podano wartości poziomu istotności bądź wyniki testów. Przyjęte poziomy istotności, przy których odrzucana jest odpowiednia hipoteza zerowa: Test Friedmana – 1%, Test sezonowości ruchomej – 20%, Test sezonowości rezydualnej – 10%, Łączny test sezonowości – patrz rozdział 3.

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Do dekompozycji szeregu metodą ARIMA-X-12 wybrany został mieszany filtr sezonowy, pozwalający lepiej radzić sobie z wykrytą niestabilnością sezonowości. Dla czerwca zastosowano filtr dłuższy (3 x 9), natomiast dla pozostałych miesięcy wykorzystany został filtr (3 x 5). Estymacji komponentu trend-cykl dokonano przy użyciu filtra Hendersona rzędu 13.

Charakter dekompozycji metodą TRAMO/SEATS zostaje z kolei odzwierciedlony za pomocą poniższych wykresów funkcji gęstości spektralnej oraz kwadratów charakterystyk częstotliwościowych (rys. 5.1.3).

**Rysunek 5.1.3. Funkcje gęstości spektralnej estymatorów komponentów szeregu czasowego (lewy) i kwadraty charakterystyk częstotliwościowych estymatorów komponentów szeregu czasowego (prawy) dla metody TRAMO/SEATS**



Oznaczenia: czerwony – trend, niebieski – składnik sezonowy, różowy – komponent nieregularny, granatowy – szereg wyrównany sezonowo.

Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

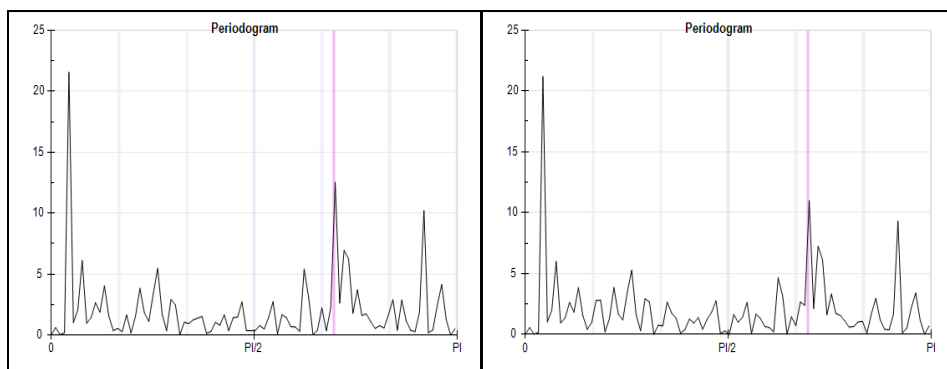
Na podstawie pierwszego wykresu można stwierdzić, że najsilniejszy wkład w estymator komponentu trend-cykl mają wahania o niskiej częstotliwości (poniżej  $\pi/6$ , czyli wahania o okresie większym niż 1 rok). W porównaniu do analogicznej funkcji gęstości tego komponentu, np. dla cen pszenicy, widać zdecydowanie mniejszy udział wahań o częstotliwości wyższej niż  $\pi/6$ .

Jednocześnie w skład komponentu nieregularnego w większym stopniu niż w przypadku innych szeregów wchodzi wahania cykliczne o częstotliwościach niższych niż  $\pi/2$  (a więc o długości okresu większej niż 4 miesiące, co akurat jest cechą mniej pożądaną; oczekuje się, że komponent nieregularny będzie obejmował wahania o wysokich częstotliwościach). Wykres charakterystyk częstotliwościowych pokazuje z kolei, że wariancja szeregu wyjściowego zоста-

ła oddana w szeregu odsezonowanym praktycznie w całości (poza częstotliwościami sezonowymi), co może wskazywać na wysoką jakość dekompozycji.

Periodogramy szeregu wyrównanego sezonowo obiema metodami są niemal identyczne (rysunek 5.1.4). Można tam zaobserwować trzy częstotliwości, których wkład w zmienność szeregu wyróżnia się. Po pierwsze, zauważyć można bardzo wysoką wartość periodogramu dla wahań cyklicznych o okresie równym blisko 4 lata (dokładnie 46 miesięcy). Jest to w przybliżeniu długość wspomnianego już powyżej „cyklu świńskiego”, mającego silny wpływ na poziom cen żywca wieprzowego. Warto zwrócić uwagę na fakt, iż cykle o tej samej długości zaobserwowano również na rynku zbóż, co wynika z obserwowanych współzależności między rynkiem produkcji zwierzęcej i roślinnej, związanych z wykorzystaniem zbóż na pasze dla zwierząt gospodarskich (zob. np. [Rembeza, 2007, str. 188]).

**Rysunek 5.1.4. Periodogramy postaci stacjonarnej szeregu wyrównanego sezonowo metodami: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

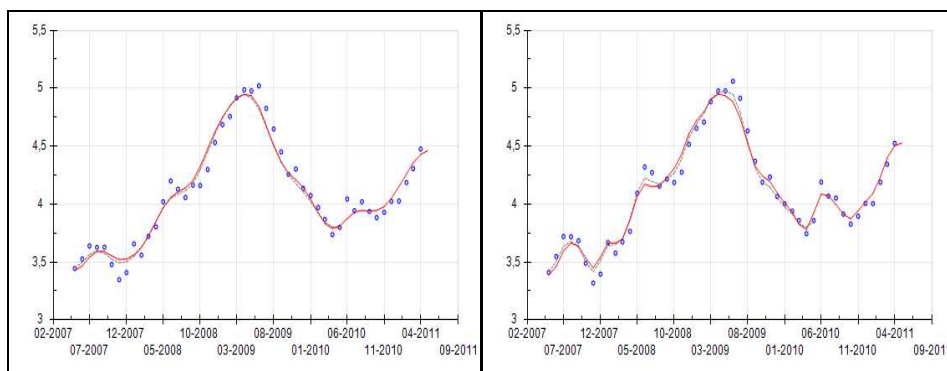
Po drugie, wysoką wartość periodogramu można odczytać dla częstotliwości związanych z liczbą dni roboczych (pionowa różowa linia). Efekt ten może sugerować potrzebę zmodyfikowania modelu, np. rozszerzenia go o efekt kalendarzowy. Jednak, jak już to było wcześniej wspomniane, zmienne opisujące ten efekt nie okazywały się istotne statystycznie. Powyższy wynik może być więc także dowodem na zajście istotnych zmian w strukturze efektu kalendarzowego w okresie objętym próbą [Grudkowska 2011]. W końcu, wysoka wartość periodogramu występuje dla wahań o częstotliwości ok.  $11/12\pi$ , a więc o okresie równym nieco ponad 2 miesiące.

Jakość stosowanych procedur dekompozycji możemy ocenić również na podstawie historii rewizji oszacowań składnika długookresowego, w miarę jak

dodajemy kolejne obserwacje. Większe zmiany wartości trendu-cyklu odnotowane zostały właściwie w dwóch momentach:

- w listopadzie 2008 r., kiedy to ceny trzody okazały się zaskakująco wysokie w efekcie silnego spadku produkcji przy powolnie rosnącym popycie oraz równoczesnej deprecjacji złotego. Wystąpiła wówczas niepewność co do tego, czy silniejszy wzrost cen będzie się kształtował zgodnie z wyższym trendem, czy będzie to tylko obserwacja odstająca;
- w czerwcu-lipcu 2009, co związane było z niepewnością co do przejścia trendu-cyklu w fazę spadkową.

**Rysunek 5.1.5. Historia rewizji trendu-cyklu uzyskanego metodami: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



Oznaczenia: czerwony – oszacowanie ostateczne trendu, niebieski – oszacowanie wstępne trendu.

Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

**Tabela 5.1.4. Miary jakości sezonowej korekty danych dla metody X-12-ARIMA**

Miara	Wartość statystyki testowej	Miara	Wartość statystyki testowej
M1	0,210	M7	0,344
M2	0,077	M8	0,645
M3	0,000	M9	0,464
M4	0,068	M10	0,862
M5	0,193	M11	0,000
M6	0,227	Q	0,293

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Jakość dekompozycji szeregu czasowego z wykorzystaniem X-12-ARIMA można ocenić na podstawie statystyk zamieszczonych w tabeli 5.1.4. Zauważyć można, że wszystkie statystyki M są mniejsze od jedności. Testy diagnostyczne obrazujące poprawność usuwania wahań sezonowych metodą ARIMA-X-12 sugerują zatem, że dekompozycja szeregu cen trzody chlewnej ma wysoką jakość.

Z kolei ocena dekompozycji metodą TRAMO/SEATS dokonuje się m.in. przy wykorzystaniu testów na zgodność między wariancją estymatora teoretycznego a wariancją wyestymowanego komponentu oraz testów korelacji między komponentami. Na podstawie pierwszego z wymienionych zestawów testów (tabela 5.1.5) widać, że różnice między wariancją estymatora a wariancją komponentu nie są istotne. W konsekwencji można uznać, że warunki poprawności dekompozycji pod tym względem zostały spełnione.

**Tabela 5.1.5. Wariancja komponentów i ich estymatorów uzyskanych za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Komponent	Estymator teoretyczny	Estymacja	Poziom istotności
Trend	0,4194	0,1916	0,1496	0,1211
Szereg skorygowany	1,6840	1,5444	1,3992	0,4728
Komponent sezonowy	0,2481	0,0061	0,0069	0,8173
Komponent nieregularny	0,2108	0,0968	0,0867	0,4262

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Korelacje pomiędzy komponentami szeregów czasowych uzyskanymi na podstawie metody TRAMO/SEATS są bardzo bliskie zera (tabela 5.1.6). Formalne testy istotności przeprowadzane w ramach algorytmów walidacyjnych TRAMO/SEATS wskazują, że są one nieistotne statystycznie. W konsekwencji można powiedzieć, że założenia modelu co do ortogonalności komponentów zostały spełnione i dekompozycja dała wyniki o pożądanych własnościach. To znaczy, że wyodrębnione komponenty są niezależnie od siebie.

**Tabela 5.1.6. Korelacje między składowymi szeregów czasowych uzyskanymi za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Estymator teoretyczny	Estymacja	Poziom istotności
Trend/Komponent sezonowy	-0,0732	-0,0918	0,8143
Trend/Komponent nieregularny	-0,0001	0,0524	0,5708
Komp. sezonowy/Komp. nieregularny	0,0256	0,0496	0,4785

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

## Podsumowanie

- Szereg czasowy miesięcznych cen skupu żywca wieprzowego w latach 1996-2011 charakteryzuje się złożoną strukturą wahań. Największy udział w zmienności mają zmiany długookresowe. W przypadku komponentu trend-cykl ważna jest zarówno ogólna tendencja wzrostowa tych cen, jak i wyraźne długookresowe wahania cykliczne związane z „cyklem świńskim”. Ich długość wynosi blisko 4 lata. Od ich prawidłowego wyznaczenia

i ekstrapolacji w największym stopniu zależy dokładność krótkookresowych prognoz cen wieprzowiny.

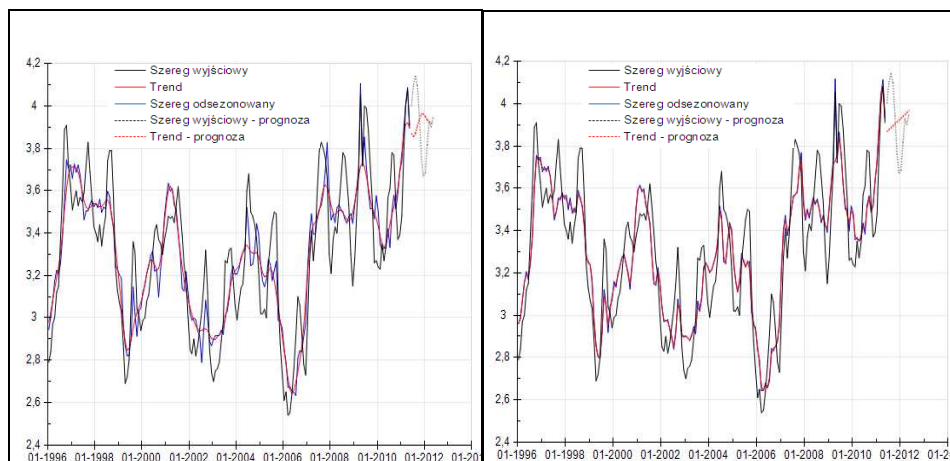
- Ceny żywca wieprzowego podlegają regularnym wahaniom sezonowym. Najniższe ceny obserwuje się w styczniu i lutym, zaś najwyższe w okresie od lipca do września. Oczekiwane wartości tego komponentu w okresie pierwszego roku poza próbą zawierają się w przedziale od -32 groszy (dla stycznia 2012 r.) do +42 groszy (dla sierpnia 2011 r.) w przypadku TRAMO/SEATS oraz od -36 groszy (dla stycznia 2012 r.) do +45 groszy (dla sierpnia 2011 r.) w przypadku X-12-ARIMA.
- Estymacja siły efektu Wielkanocy sugeruje, że w okresie tym ceny żywca są wyższe średnio o ok. 7 groszy/kg.
- Wzorzec wahań sezonowych ulega powolnym zmianom. Zmienił się znak czynnika sezonowego w czerwcu (z ujemnego na dodatni) oraz w październiku (z dodatniego na ujemny), przy czym zmiany te nadal się pogłębiają. Obserwuje się również wzmocnienie zmian sezonowych w lipcu (ceny coraz wyższe) oraz w listopadzie, grudniu i styczniu (ceny coraz niższe od średniej). Przy prognozowaniu ważne jest zatem sugerowanie się nie tyle średnimi wartościami czynnika sezonowego, lecz kierunkiem jego ewolucji.
- Wyestymowane obiema metodami modele prognostyczne wydają się relatywnie stabilne i dobrze oddają charakter szeregu czasowego. Poza efektem Wielkanocy nie było potrzeby wprowadzania innych regresorów deterministycznych. Oznacza to również, że ceny żywca nie były poddane gwałtownym zmianom wartości lub szokom, trudnym do opisanego za pomocą powyższych modeli.
- Oszacowane modele RegARIMA oraz TRAMO wyjaśniają najważniejsze prawidłowości kształtujące ceny wieprzowiny oraz spełniają prawie wszystkie warunki nakładane modelom ekonometrycznym w zakresie istotności parametrów, rozkładu składnika losowego oraz dopasowania modelu do danych empirycznych. Ich wadą jest niepełne odzwierciedlenie struktury dynamicznej szeregu, skutkujące występowaniem autokorelacji reszt dla opóźnień rzędu 3 i 10.

## 5.2. Ceny żywca drobiowego

Ceny żywca drobiowego w omawianym okresie charakteryzowały się silnymi wahaniami sezonowymi oraz nieregularnymi wokół trendu-cyklu (zob. rysunek 5.2.1). W przypadku komponentu trend-cykl na przestrzeni całej próby trudno wyróżnić jednokierunkową tendencję. Wyraźne są jednak wahania cy-

kliczne o okresie podobnym jak w przypadku cen trzody chlewnej. Może to być spowodowane pewną substytucyjnością mięsa drobiowego i wieprzowego dla konsumentów finalnych i wynikającą z tego korelacją zmian cen obydwu gatunków mięsa.

**Rysunek 5.2.1. Ceny żywca drobiowego w Polsce w latach 1996 – 2011 (zł/kg). Szereg wyjściowy oraz szacunki trendu i danych wyrównanych sezonowo na podstawie modeli: X-12-ARIMA (lewy) oraz TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Wstępna analiza wizualna wykresu 5.2.1 pozwala stwierdzić, że poszczególne komponenty wyodrębnione przy pomocy obydwu metod kształtują się nieco inaczej. Przede wszystkim, komponent trend-cykl pochodzący z X-12-ARIMA jest znacznie gładziej niż ten pochodzący z metody alternatywnej, co, podobnie jak w przypadku cen trzody chlewnej, jest wynikiem metody estymacji: w X-12-ARIMA stosowane są średnie ruchome, tymczasem dekompozycja TRAMO/SEATS opiera się na charakterystykach modelu ARIMA. Jednocześnie, większą wariancję ta ostatnia metoda przypisuje komponentowi nieregularnemu oraz komponentowi sezonowemu.

### Modele prognostyczne

Specyfikacja i estymacja parametrów modeli dała w obydwu przypadkach bardzo zbliżone wyniki (zob. tabela 5.2.1). Ostatecznie przyjęte modele zawierały po jednym komponentie średniej ruchomej oraz sezonowej średniej ruchomej (tzw. model „airline”). W przypadku żywca drobiowego przyjęty został w obu metodach addytywny model dekompozycji, czyli oszacowania dokony-



wane były na poziomach cen (model na logarytmach charakteryzował się zblizoną jakością).

**Tabela 5.2.1. Parametry modeli RegARIMA i TRAMO**

Parametr	X-12-ARIMA		TRAMO/SEATS	
	Wartość/odchylenie standardowe	Statystyka t/ poziom istotności	Wartość/ odchylenie standardowe	Statystyka t/ poziom istotności
MA(1)	0,3439/0,0709	4,85/0,0000	0,3442/0,0743	4,63/0,0000
SMA(1)	-0,7983/0,0552	-14,45/0,0000	-0,7992/0,0773	-10,34/0,0000
Efekt Wielkanocy	0,0454/0,0186	2,44/0,0159	0,0454/0,0186	2,44/0,0159
AO[04.2009]	0,3903/0,0574	6,80/0,0000	0,3904/0,0574	6,80/0,0000

Specyfikacja modeli: RegARIMA – (0,1,1)(0,1,1), TRAMO – (0,1,1)(0,1,1).

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Pomimo na pozór chaotycznego zachowania cen, w procesie linearyzacji szeregu cen żywca drobiowego nie było potrzeby włączania do modeli wielu regresorów deterministycznych. Oznacza to, że dobrane modele dobrze „radzą sobie” z opisem dynamicznej struktury szeregu. Jedynym okresem, dla którego obserwacja odstająca została automatycznie wyodrębniona, był kwiecień 2009 r. Bardzo wysoki poziom cen w tym miesiącu mógł być związany z uprzednim, mającym miejsce w II połowie 2008 i w na początku 2009 r., spadkiem produkcji drobiu i brakiem surowca rzeźnego na rynku.

Ponadto, dla cen żywca drobiowego istotny okazał się wpływ występowania Świąt Wielkanocy. Może to być związane, podobnie jak w przypadku cen trzody chlewnej, ze wzmożonym popytem na mięso w okresie przedświątecznym. Wartości parametrów zarówno efektu Wielkanocy, jak i obserwacji odstającej, estymowane przy użyciu obydwu metod są prawie identyczne. Na ich podstawie można stwierdzić, że ceny żywca drobiowego są w okresie świąt wyższe średnio o 5 groszy/kg.

Ocena jakości powyższych modeli pod kątem zgodności reszt ze stawianymi im wymaganiami została przedstawiona w tabeli 5.2.2. Na jej podstawie można stwierdzić, że wszystkie wymagane własności reszt z opisanych powyżej modeli X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS zostały spełnione. Reszty mają rozkład normalny i nie wykazują autokorelacji ani na opóźnieniach zwykłych, ani sezonowych. Nie wykazują one również zależności nieliniowych.

**Tabela 5.2.2. Charakterystyka reszt z modeli prognostycznych RegARIMA i TRAMO**

Test	X-12-ARIMA	TRAMO/SEATS
	Poziom istotności	
Normalność reszt		
Średnia	0,5967	0,5966
Skośność	0,9438	0,9417
Kurtoza	0,5624	0,5641
Test normalności	0,5866	0,5881
Niezależność		
Test Ljung-Boxa (24 opóźnienia)	0,8219	0,8230
Test Boxa-Pierce'a (24 opóźnienia)	0,8905	0,8912
Test Ljung-Boxa dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,8720	0,8740
Test Boxa-Pierce'a dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,8918	0,8938
Liniowość reszt		
Test Ljung-Boxa na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,1057	0,1057
Test Boxa-Pierce'a na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,1780	0,1780

W sekcji „Normalność reszt” przytoczono poziom istotności dla testu normalności Doornika-Hansena, a także poziomy istotności dla testów zbieżności wartości skośności i kurtozy z wartościami charakterystycznymi dla rozkładu normalnego oraz testu zerowej średniej reszt.

*Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.*

### **Dekompozycja szeregu czasowego: prawidłowości i diagnostyka**

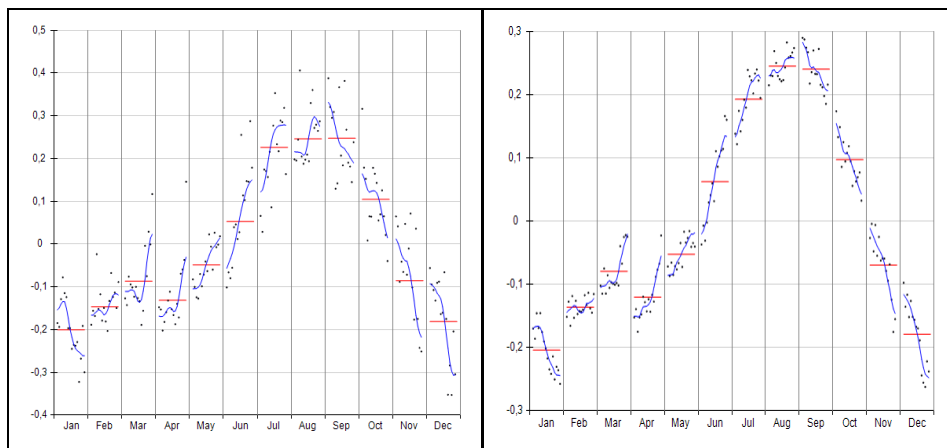
Linearyzacja szeregu i oszacowanie na ich podstawie modeli typu SARIMA służą następnie rozłożeniu szeregu na poszczególne komponenty składowe. Dekompozycja ta mówi nam jeszcze więcej na temat struktury i charakteru tego szeregu. Analiza wyników tego procesu pokazuje, że współzależność cen żywca drobiowego i wieprzowego jest wyraźna nie tylko w przypadku trendu, ale również innych komponentów, w tym czynnika sezonowego.

Na rysunku 5.2.2 widać, że ceny żywca drobiowego są, podobnie jak na rynku trzody chlewnej, sezonowo wyższe w miesiącach letnich oraz na początku jesieni (najbardziej w sierpniu i wrześniu), a niższe w listopadzie, w zimie i na wiosnę, przy czym wzrosty są silniejsze i gwałtowniejsze niż spadki. Maksymalne odchylenie dodatnie wg TRAMO/SEATS występuje w sierpniu i wynosi ok. +25 groszy/kg (wg X-12-ARIMA ta sama wartość dla sierpnia i września), natomiast maksymalne odchylenie ujemne ma miejsce w styczniu i wynosi -20 groszy/kg (zgodnie z wynikami X-12-ARIMA).

Jednocześnie jednak warto zwrócić uwagę na wyraźną zmianę wzorca sezonowości w czasie. Zmiany sezonowe cen pogłębiają się w listopadzie, grudniu i styczniu (poziom coraz niższy) oraz w czerwcu i lipcu (poziom coraz wyższy), natomiast słabną w miesiącach wiosennych oraz we wrześniu i październiku (składniki sezonowe w tych miesiącach coraz bardziej zbliżają się ku zero). Powyższa ewolucja sezonowości wygląda podobnie, jak zmiany zachodzące

w tym okresie na rynku wieprzowiny. Porównanie składników sezonowych wyekstrahowanych przez X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS pokazuje, że te pierwsze są znacznie bardziej rozproszone wewnątrz poszczególnych miesięcy niż te drugie.

**Rysunek 5.2.2. Czynniki sezonowe (zł/kg) oszacowane za pomocą metod: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Zauważalna na wykresie zmienność składników sezonowych w poszczególnych miesiącach nie została jednak potwierdzona przez testy formalne (zob. tabela 5.2.3). W teście sezonowości ruchomej nie można odrzucić hipotezy o jej braku przy wysokim poziomie istotności zarówno w przypadku X-12-ARIMA, jak i TRAMO/SEATS. Może to wynikać z niewielkiej skali zmian (wyrażonych w złotych) oraz łagodnych zmian wzorców. Testy potwierdziły, że wahania sezonowe są w przypadku tego szeregu istotne, lecz jednocześnie zostały one skutecznie usunięte z szeregu przy pomocy zastosowanych filtrów.

**Tabela 5.2.3. Testy sezonowości dla wyników metod: X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS**

Test	X-12-ARIMA	TRAMO/SEATS
	Poziom istotności/wynik	Poziom istotności/wynik
Test Friedmana	0,0000	0,0000
Test sezonowości ruchomej	0,3691 (nie występuje sezonowość ruchoma)	0,8763 (nie występuje sezonowość ruchoma)
Łączny test sezonowości	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym
Test sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej

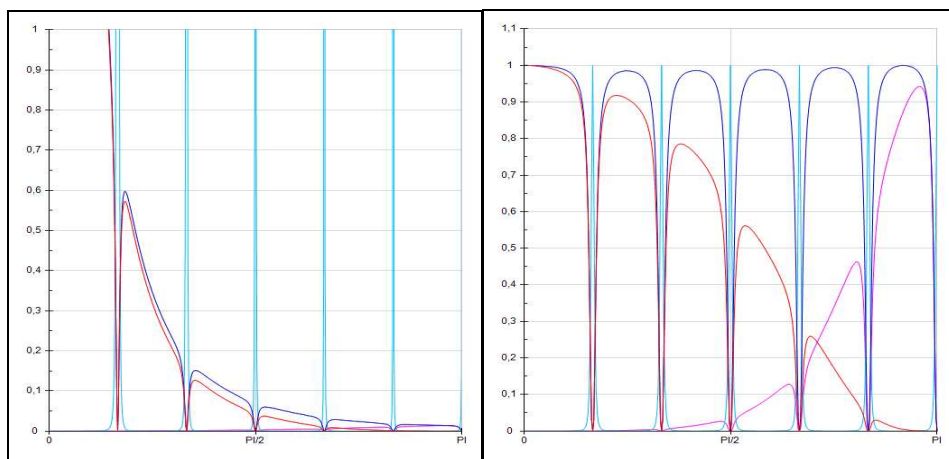
Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Ze względu na różną charakterystykę (stopień zmienności) sezonowości w poszczególnych miesiącach, dekompozycja szeregu przez X-12-ARIMA na

komponenty dokonała się przy wykorzystaniu mieszanych filtrów sezonowych. Dla czerwca zastosowano filtr dłuższy ( $3 \times 9$ ), pozwalający skuteczniej wygładzić obserwowaną niestabilność. Dla pozostałych miesięcy wykorzystany został filtr ( $3 \times 5$ ). Dla wyekstrahowania z szeregu wyjściowego trendu-cyklu posłużono się filtrem Hendersona, którego długość (11 okresów) została dobrana przez algorytm X-12-ARIMA.

Pewne cechy estymatorów TRAMO/SEATS dla poszczególnych komponentów szeregu cen żywności drobiowego zostały zaprezentowane na rysunku 5.2.3. Na podstawie wykresu gęstości spektralnej również można stwierdzić, że ostatecznie wybrana struktura modelu uwzględnia sezonowość (estymator składnika sezonowego skupia swoje wartości wokół częstotliwości sezonowych). W porównaniu np. do pszenicy na komponent trend-cykl w nieco mniejszym stopniu składają się wahania o częstotliwości w przedziale  $(0, 2\pi/6)$ , a w nieco wyższym wahań o częstotliwościach większych od  $2\pi/6$  (czyli o okresie krótszym niż pół roku).

**Rysunek 5.2.3. Funkcje gęstości spektralnej estymatorów komponentów szeregu czasowego (lewy) i kwadraty charakterystyk częstotliwościowych estymatorów komponentów szeregu czasowego (prawy) dla metody TRAMO/SEATS**



Oznaczenia: czerwony – trend, niebieski – składnik sezonowy, różowy – komponent nieregularny, granatowy – szereg wyrównany sezonowo.

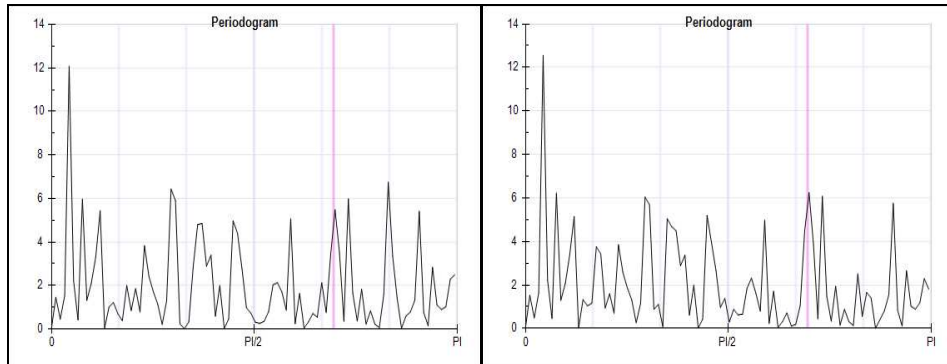
Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Z kolei wykres charakterystyk częstotliwościowych sugeruje, że wariancja wyjściowego szeregu jest w blisko 100% oddana w szeregu odsezonowanym (poza częstotliwościami sezonowymi), co świadczy o bardzo niedużej utracie informacji spowodowanej procesem usuwania sezonowości. Komponent niere-

gularny jest tutaj z kolei skupiony wokół wysokich częstotliwości (czyli wariancja szeregu wyjściowego jest w dużej mierze odzwierciedlona w komponencie nieregularnym właśnie dla wysokich częstotliwości, a więc dla wahań o krótkim okresie), co również jest cechą pożądaną dekompozycji. Pod tym względem wydaje się, że ekstrakcja komponentów z szeregu cen żywca drobiowego dała wyniki lepsze niż to ma miejsce np. w przypadku cen pszenicy.

Ocenie modelu oraz dekompozycji służą również periodogramy wykonane dla szeregów odsezonowanych, będących wynikiem zastosowania obydwu metod (zob. rysunek 5.2.4). Na ich podstawie można stwierdzić, że szereg oczyszczony z wahań sezonowych ma pożądane własności. Sezonowość została usunięta skutecznie (wykres periodogramu nie charakteryzuje się wysokimi odstającymi wartościami dla żadnych częstotliwości sezonowych). Wahania związane z liczbą dni tygodnia również nie są istotne i nie ma potrzeby uwzględniania tego efektu w strukturze modelu. Periodogram dla tego szeregu nie wskazuje więc na występowanie żadnych poważnych problemów ważących na jakości wyników dekompozycji. Jednocześnie dostarcza on dodatkowych informacji na temat analizowanego szeregu, które mogą być przydatne w procesie prognozowania.

**Rysunek 5.2.4. Periodogramy postaci stacjonarnej szeregu wyrównanego sezonowo metodami: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



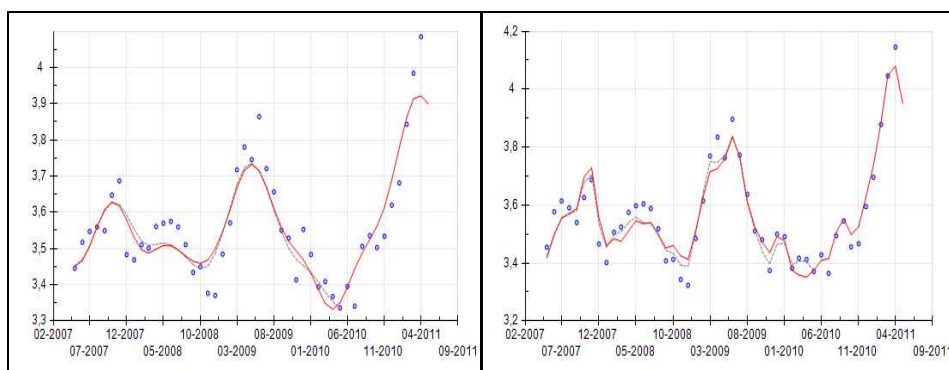
*Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.*

Periodogram dla odsezonowanych cen żywca drobiowego wskazuje na występowanie w szeregu czasowym wahań cyklicznych o długości okresu równej ok. 4 lat (dokładnie – 46 miesięcy). Odpowiada to długości tzw. „cyklu świńskiego”. Wynik ten sugeruje, że ceny na rynku wieprzowiny mogą mieć wpływ na ceny żywca drobiowego, co stanowi potwierdzenie rezultatów dotychczasowych badań (zob. [Hamulczuk, Strasburger 2007]).

W przypadku prognozowania na podstawie wyestymowanych modeli z wyróżnionymi komponentami warto zwrócić uwagę na stabilność oszacowań

poszczególnych komponentów. Historia rewizji trendu dla szeregu cen żywca drobiowego została zaprezentowana na rysunku 5.2.5. W przypadku stosowania modeli dobranych powyżej, rewizje trendu nie wydają się silne. W przypadku TRAMO/SEATS, jedynie dla wspomnianego już wyżej kwietnia 2009 r. różnica między oszacowaniem wstępnym i oszacowaniem ostatecznym była wyższa niż dwukrotność wartości RMSE<sup>50</sup>, uznawana za granicę dopuszczalności dla tych różnic. Jak już wspomniano, obserwacja ta została uznana za obserwację odstającą, miała więc wartość nietypową. Wstępne oszacowanie trendu w tym punkcie mogło prowadzić do błędnych wniosków i w efekcie dodania kolejnych obserwacji musiało zostać poprawione. W przypadku estymacji trendu metodą X-12-ARIMA poza lipcem 2009 r., w którym po fakcie można stwierdzić, że nastąpiła zmiana fazy cyklu, wysoką wartość rewizji zaobserwowano również pod koniec próby, w kwietniu 2011 r.

**Rysunek 5.2.5. Historia rewizji trendu-cyklu uzyskanego metodami: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



Oznaczenia: czerwony – oszacowanie ostateczne trendu, niebieski – oszacowanie wstępne trendu.

Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Jakość dekompozycji przeprowadzonej przy użyciu X-12-ARIMA, mierzona statystykami M i Q, została zaprezentowana w tabeli 5.2.4. Na podstawie większości tych statystyk można przyjąć, że wyniki odsezonowania są akceptowalne. Wartość krytyczna została przekroczona jedynie w przypadku statystyki M4, sugerując, że wyodrębniony komponent nieregularny może nie spełniać wa-

<sup>50</sup> RMSE (ang. Root mean square error) – pierwiastek z błędu średniokwadratowego. W przypadku analizy rewizji, błąd średniokwadratowy oznacza średnią wartość rewizji, czyli różnicę pomiędzy wartościami pochodzącymi z estymacji wstępnej oraz estymacji ostatecznej dla kolejnych obserwacji.

runku losowości. Nie jest to jednak cecha dyskwalifikująca dokonaną dekompozycję.

**Tabela 5.2.4. Miary jakości sezonowej korekty danych dla metody X-12-ARIMA**

Miara	Wartość statystyki testowej	Miara	Wartość statystyki testowej
M1	0,357	M7	0,300
M2	0,126	M8	0,654
M3	0,006	M9	0,582
M4	1,156	M10	0,912
M5	0,260	M11	0,000
M6	0,368	Q	0,427

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Dodatkowym testem poprawności dekompozycji dokonanej przez TRAMO/SEATS jest statystyczne porównanie wariancji estymatorów teoretycznych oraz wyników estymacji. W tabeli 5.2.5 widać, że dla wykorzystywanego tu modelu wartości te dla poszczególnych komponentów są do siebie zbliżone. Rezultat ten stanowi potwierdzenie założeń dekompozycji oraz argument za poprawnością specyfikacji wyestymowanego modelu.

**Tabela 5.2.5. Wariancja komponentów i ich estymatorów uzyskanych za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Komponent	Estymator teoretyczny	Estymacja	Poziom istotności
Trend	0,7253	0,4842	0,4715	0,8499
Szereg skorygowany	1,2477	1,1175	1,0704	0,7262
Komponent sezonowy	0,6884	0,0195	0,0208	0,8961
Komponent nieregularny	0,0871	0,0257	0,0243	0,7113

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

**Tabela 5.2.6. Korelacje między składowymi szeregów czasowych uzyskanymi za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Estymator teoretyczny	Estymacja	Poziom istotności
Trend/Komponent sezonowy	-0,0738	-0,1059	0,6360
Trend/Komponent nieregularny	0,1082	0,1001	0,9207
Komp. sezonowy/Komp. nieregularny	0,0200	0,0343	0,5031

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Z kolei weryfikacja założenia o ortogonalności komponentów została zaprezentowana w tabeli 5.2.6. Wartości korelacji zarówno pomiędzy poszczególnymi estymatorami, jak i komponentami uzyskanymi w wyniku estymacji, są bardzo niskie (zbliżone do zera). Hipoteza o braku istotności powyższych kore-

lacji nie może być odrzucona dla żadnej z par komponentów, tak więc przyjmuje się, że założenia modelu również w tym aspekcie zostały spełnione.

## Podsumowanie

- Przeprowadzona analiza pokazuje, że ceny żywca drobiowego również podlegają wahaniom krótko- i długookresowym o różnej częstotliwości. W przypadku komponentu trend-cykl trudno jest wyróżnić długookresową, jednokierunkową tendencję, ważne są przede wszystkim długookresowe wahania o okresie ok. 4 lat, a więc charakterystyczne dla opisywanego już wcześniej „cyklu świńskiego”. Sugeruje to istnienie powiązań pomiędzy cenami trzody chlewnej a cenami drobiu.
- Wahania sezonowe w przypadku cen żywca drobiowego są wyraźne, co potwierdzają formalne testy statystyczne. W swoim charakterze przypominają wahania na rynku trzody chlewnej: najniższe ceny obserwuje się w zimie (styczeń, grudzień), natomiast najwyższe między lipcem a wrześniem. W horyzoncie 12 miesięcy, poczynając od końca próby, składnik sezonowy będzie w poszczególnych miesiącach zmieniał się w przedziale od -25 groszy (w grudniu 2011 i styczniu 2012 r.) do +26 groszy w sierpniu 2011 r. wg TRAMO/SEATS oraz w przedziale od -30 groszy w grudniu 2011 r. do +28 groszy w lipcu 2011 r., zgodnie z wynikami X-12-ARIMA.
- Pomimo iż testy formalne wskazują na relatywną stabilność czynnika sezonowego w czasie, analiza wizualna może sugerować istnienie zmian wzorca. Dlatego też w procesie prognostycznym warto uwzględniać kierunek ewolucji czynnika sezonowego, który również wydaje się związany z procesami zachodzącymi na rynku trzody chlewnej.
- Estymacja siły efektu Wielkanocy sugeruje, że w okresie tym ceny żywca są wyższe średnio o ok. 5 groszy/kg.
- Ocena oszacowanych modeli prognostycznych jest pozytywna. Testy formalne sugerują, że modele te spełniają wszystkie ważne założenia dotyczące własności reszt, istotności parametrów. Są one również relatywnie stabilne. Niewielka liczba obserwacji odstających świadczy o dobrym odzwierciedleniu charakteru szeregu przez model.
- Jakość dekompozycji również można ocenić pozytywnie. Formalne testy przeprowadzane w ramach procedur TRAMO/SEATS oraz X-12-ARIMA sugerują, że większość własności poprawnej dekompozycji została spełniona. Oszacowania poszczególnych komponentów są również relatywnie stabilne, tj. nie zmieniają się silnie pod wpływem uwzględnienia nowych informacji.

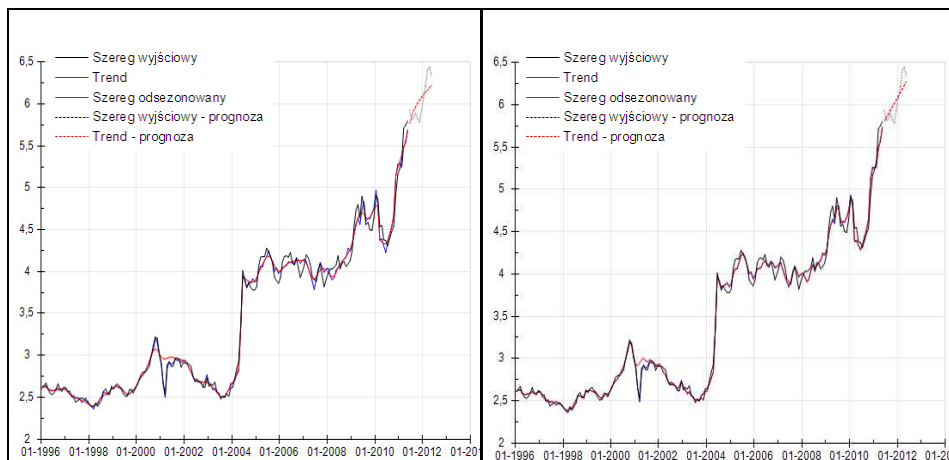


### 5.3. Ceny wołowiny

Wyniki badań przedstawionych w poprzednich dwóch podrozdziałach wskazują na symptomy współzależności pomiędzy cenami trzody chlewnej a cenami żywca drobiowego. Ceny wołowiny zachowują się wyraźnie inaczej od cen opisanych powyżej dwóch gatunków żywca. Ma to związek zarówno z odmiennymi uregulowaniami prawnymi funkcjonującymi w przypadku tego rynku, jak również z powiązaniem z rynkiem mleka. Odmienna jest też orientacja produkcji i inny rynek zbytu.

Na rysunku 5.3.1 widać, że w latach 1996-2011 ewolucja cen wołowiny przebiegała odmiennie w różnych podokresach. Głównym czynnikiem determinującym poziom cen żywca wołowego w poszczególnych miesiącach jest trend. Zmienność krótkookresowa, w tym sezonowa i nieregularna wydaje się mieć znacznie mniejszy wpływ, również jeśli porównamy przebieg szeregu cen wołowiny do przebiegu cen pozostałych gatunków żywca.

**Rysunek 5.3.1. Ceny wołowiny w Polsce w latach 1996-2011. Szereg wyjściowy oraz szacunki trendu i danych wyrównanych sezonowo na podstawie modeli: X-12-ARIMA (lewy) oraz TRAMO/SEATS (prawy)**



Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

W okresie do momentu przystąpienia Polski do UE (poza marcem 2001 r., kiedy to wystąpił gwałtowny spadek popytu na ten gatunek mięsa związany z przypadkami zachorowań bydła na chorobę BSE oraz okresem od czerwca 2004 aż do początku 2009 roku) ceny żywca wołowego charakteryzowały się relatywną stabilnością. W miesiącach bezpośrednio po akcesji ceny wołowiny podniosły się bardzo gwałtownie w efekcie silnego wzrostu cen bydła, zwłaszcza

cza cieląt, na które zwiększył się popyt eksportowy. Niski poziom cen w marcu 2010 r. wynikał najprawdopodobniej z ograniczenia eksportu z Polski, wynikającego z zastrzeżeń weterynaryjnych. Sytuacja ta utrzymywała się przez kilka miesięcy aż do momentu, gdy ograniczenia eksportowe zostały zniesione. Już od drugiej połowy 2010 r. aż do połowy 2011 r. ceny wołowiny podlegały natomiast silnej tendencji wzrostowej, która mogła być spowodowana dynamicznym wzrostem cen żywca wołowego w całej UE. Wykonane prognozy cen żywca wołowego na okres od czerwca 2011 sugerują kontynuację tego trendu.

### Modele prognostyczne

Do modelowania cen wołowiny i dekompozycji zastosowano transformację logarymiczną szeregu czasowego, co jest równoznaczne z przyjęciem moltiplicywnego typu zależności pomiędzy poszczególnymi komponentami. W celu linearyzacji szeregu i przygotowania go do dalszego modelowania i dekompozycji, opisane powyżej nietypowe zmiany cen wynikające z czynników zewnętrznych zostały wprowadzone do modeli cen żywca wołowego w postaci obserwacji odstających i regresorów deterministycznych różnych typów (zob. tabela 5.3.1).

**Tabela 5.3.1. Parametry modeli RegARIMA i TRAMO**

Parametr	X-12-ARIMA		TRAMO/SEATS	
	Wartość/ odchylenie standardowe	Statystyka t/ poziom istotności	Wartość/ odchylenie standardowe	Statystyka t/ poziom istotności
MA(1)	0,2282/0,0731	3,12/0,0021	0,2276/0,0771	2,95/0,0036
SMA(1)	-0,7373/0,0574	-12,84/0,0000	-0,7375/0,0669	-11,02/0,0000
TC[02.2001]	-0,0982/0,0176	-5,57/0,0000	-0,0982/0,0176	-5,57/0,0000
AO[03.2001]	-0,0987/0,0126	-7,86/0,0000	-0,0987/0,0126	-7,85/0,0000
LS[03.2010]	-0,0881/0,0197	-4,46/0,0000	-0,0882/0,0198	-4,46/0,0000
LS[11.2010]	0,0766/0,0204	3,75/0,0002	0,0766/0,0204	3,75/0,0002
RP[04.2004-06.2004]	0,3248/0,0307	10,59/0,0000	0,3248/0,0307	10,59/0,0000

Specyfikacja modeli: RegARIMA – (0,1,1)(0,1,1), TRAMO – (0,1,1)(0,1,1).

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.

Wydarzenia związane z chorobą BSE w 2001 r. zostały uwzględnione w postaci zmiennych AO i TC. Zmiana poziomu wynikająca z konwergencji cen, rozpoczętej w chwili przystąpienia do UE i rozłożonej w czasie na przestrzeni dwóch miesięcy, jest modelowana za pomocą zmiennej RP. Wydarzenia mające miejsce w 2010 r. zostały wyrażone jako następujące po sobie zmiany poziomu LS. W przypadku mięsa wołowego, w odróżnieniu od pozostałych gatunków żywca, efekt Wielkanocy wydaje się nie mieć wpływu. Prawdopodobnie wynika to z relatywnie słabego popytu na ten gatunek mięsa w Polsce.

Najlepsze dopasowanie modelu do danych, biorąc pod uwagę diagnostykę modeli i dekompozycji, ponownie uzyskano stosując model „airline”, a więc model zawierający jeden komponent średniej ruchomej i jeden komponent sezonowej średniej ruchomej. Wartości parametrów stojących przy tych zmiennych znajdują się w tabeli 5.3.1. Widać, że estymacja modelu przez algorytmy X-12-ARIMA oraz TRAMO dała bardzo zbliżone wyniki.

Po ustaleniu struktury modelu i oszacowaniu jego parametrów, modele zostały zweryfikowane pod kątem spełnienia przez reszty z nich pochodzące szeregu standardowych własności. Tabela 5.3.2 pokazuje wyniki testów rozkładu reszt, testów autokorelacji oraz liniowości. Sugerują one, że reszty z przyjętych modeli mają rozkład normalny i są losowe. Nie posiadają również cech nielinowości. Oznacza to, że założenia co do własności reszt są spełnione.

**Tabela 5.3.2. Charakterystyka reszt z modeli prognostycznych RegARIMA i TRAMO**

Test	X12-ARIMA	TRAMO/SEATS
	Poziom istotności	
Normalność reszt		
Średnia	0,3102	0,3100
Skośność	0,4211	0,4209
Kurtoza	0,6999	0,7006
Test normalności	0,6948	0,6948
Niezależność		
Test Ljung-Boxa (24 opóźnienia)	0,9884	0,9884
Test Boxa-Pierce'a (24 opóźnienia)	0,9944	0,9944
Test Ljung-Boxa dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,4145	0,4146
Test Boxa-Pierce'a dla opóźnień sezonowych (3 opóźnienia)	0,4726	0,4726
Liniowość reszt		
Test Ljunga-Boxa na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,4111	0,4124
Test Boxa-Pierce'a na kwadratach reszt (24 opóźnienia)	0,5141	0,5155

W sekcji „Normalność reszt” przytoczono poziom istotności dla testu normalności Doornika-Hansena, a także poziomy istotności dla testów zbieżności wartości skośności i kurtozy z wartościami charakterystycznymi dla rozkładu normalnego oraz testu zerowej średniej reszt.

*Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.*

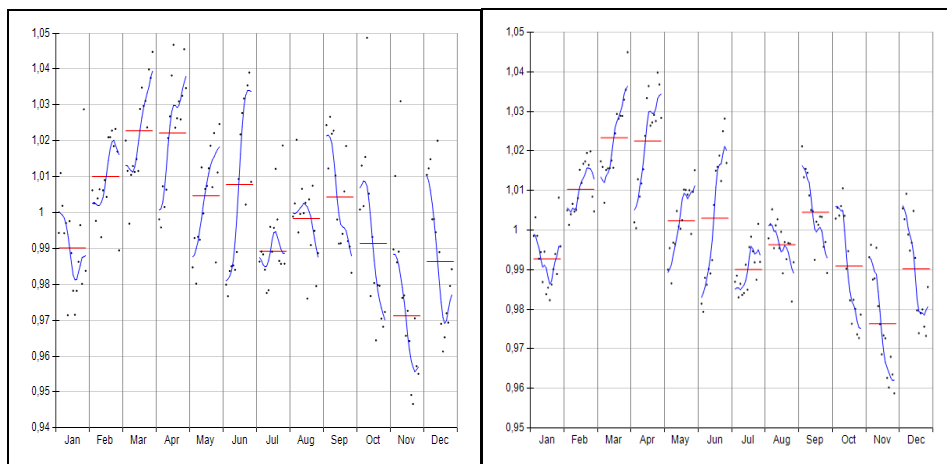
### **Dekompozycja szeregu czasowego: prawidłowości i diagnostyka**

Po prawidłowej specyfikacji modeli nastąpiła dekompozycja wyjściowego szeregu na komponenty: trend-cykl, składnik sezonowy oraz nieregularny. Wyekstrahowany komponent trend-cykl zaprezentowany został na rysunku 5.3.1.

Wahania sezonowe cen żywca wołowego mają charakter wyraźnie odmienny od cen dotychczas analizowanych gatunków żywca (zob. rysunek 5.3.2). Czynniki sezonowy jest relatywnie silniejszy w pierwszej połowie roku (od lutego do czerwca, z maksimum w marcu, kiedy to jest on przeciętnie o 2,3% wyższy od wartości średniorocznej), a relatywnie słabszy późną jesienią, w grudniu

i styczniu (minimum w listopadzie, wartości szeregu dla tego miesiąca są średnio o 2,4% niższe wg TRAMO/SEATS i o 2,9% niższe wg X-12-ARIMA).

**Rysunek 5.3.2. Czynniki sezonowe oszacowane za pomocą metod: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



*Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.*

Warto zwrócić uwagę na charakter czynników sezonowych uzyskanych obydwoma metodami. Po pierwsze, schemat wahań sezonowych wydaje się zmienny w czasie, a zmiany te przyspieszyły wraz z przystąpieniem Polski do UE. Przyczynić się do tego mogła ewolucja uwarunkowań zarówno po stronie popytowej, jak i produkcyjnej, w tym przede wszystkim rosnący eksport do krajów UE, wprowadzenie zachęt do produkcji bydła w kierunku mięsnym itd. Korekty wartości czynnika sezonowego następowały w niemalże wszystkich miesiącach, jednak w przypadku kilku były one istotne ze względu na zmianę kierunku oddziaływania sezonowości (maj, czerwiec, wrzesień, październik, grudzień). W marcu i kwietniu dodatnie czynniki sezonowe zwiększyły swoją wartość, a w listopadzie wzmocnił swoje oddziaływanie czynnik negatywny. Po drugie, istnieją wyraźne różnice w wynikach pomiędzy obydwoma metodami odsezonowania. Poszczególne obserwacje czynnika sezonowego pochodzące z TRAMO/SEATS są bardziej skoncentrowane wewnątrz miesiący. W przypadku X-12-ARIMA, gdzie obserwacje czynnika sezonowego są bardzo rozproszone i niekiedy trudno jest mówić o specyficznym zachowaniu cen w danym miesiącu, mogą zacząć pojawiać się wątpliwości co do tego, czy czynnik sezonowy jest rzeczywiście istotny dla wyjaśnienia przebiegu szeregu czasowego.

**Tabela 5.3.3. Testy sezonowości dla wyników metod: X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS**

Test	X-12-ARIMA	TRAMO/SEATS
	Poziom istotności/wynik	Poziom istotności/wynik
Test Friedmana	0,0000	0,0000
Test sezonowości ruchomej	0,0000 (występuje sezonowość ruchoma)	0,0000 (występuje sezonowość ruchoma)
Łączny test sezonowości	Identyfikowalna sezonowość w szeregu czasowym prawdopodobnie nie występuje	Zidentyfikowano sezonowość w szeregu czasowym
Test sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej	Brak sezonowości rezydualnej

*Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.*

Niepewność co do istnienia istotnej sezonowości częściowo potwierdzają formalne testy statystyczne, których wyniki prezentuje tabela 5.3.3. Choć test Friedmana w obu przypadkach prowadzi do stwierdzenia istotności wahań sezonowych, to już wyniki łącznego testu sezonowości w obu metodach są różne. Test ten, oceniając ekstrakcję sezonowości metodą TRAMO/SEATS, prowadzi do wniosku o obecności wahań sezonowych, podczas gdy dla wyników metody X-12-ARIMA nie pozwala na wyciągnięcie jednoznacznych wniosków. Rezultat ten wynika najprawdopodobniej z różnokierunkowych wskazań poszczególnych testów uwzględnianych w algorytmie łącznego testu sezonowości<sup>51</sup>. Z jednej strony wspomniany już test Friedmana oraz nieprzytaczany w tabeli 5.3.3 test Kruskala-Wallisa prowadzą do konkluzji, iż wahania sezonowe w tym szeregu są istotne. Z drugiej strony, test identyfikowalnej sezonowości sugeruje brak podstaw do odrzucenia hipotezy o braku wyraźnych wahań sezonowych, czy to stabilnych, czy ewoluujących w czasie. W efekcie wynik testu łącznego wskazuje jedynie na prawdopodobieństwo braku identyfikowalnej sezonowości w szeregu cen wołowiny.

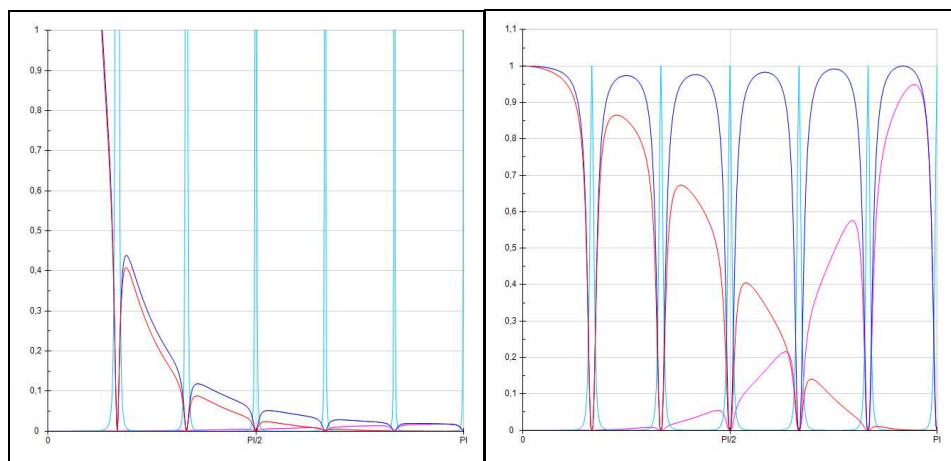
Do wyróżnienia z szeregu czynnika sezonowego metodą X-12-ARIMA dobrany został automatycznie filtr (3 x 5), natomiast ekstrakcja komponentu trend-cykl nastąpiła w wyniku zastosowania filtra Hendersona rzędu 9, co sugeruje umiarkowaną siłę wahań nieregularnych w stosunku do trendu.

Proces dekompozycji szeregu na poszczególne składowe przy użyciu TRAMO/SEATS został scharakteryzowany na rysunku 5.3.4, prezentującym wykresy gęstości spektralnej i kwadratów charakterystyk częstotliwościowych estymatorów. Funkcja gęstości spektralnej jest skupiona wokół częstotliwości sezonowych, co świadczy o tym, że wahania sezonowe stanowią istotną cechę szeregu czasowego i dekompozycja będzie ten fakt uwzględniać. Wkład częstotliwości niższych niż  $\frac{\pi}{2}$  (czyli o okresie dłuższym niż 4 miesiące) do komponentu

<sup>51</sup> Zob. opis testu w rozdziale 3.

tu trend-cykl jest w przypadku wołowiny niższy niż dla żywca drobiowego, lecz wyższy niż w przypadku trzody chlewnej. Wskazuje to na odmienną strukturę wahań cyklicznych w cenach każdego z tych trzech gatunków żywca.

**Rysunek 5.3.3. Funkcje gęstości spektralnej estymatorów komponentów szeregu czasowego (lewy) i kwadraty charakterystyk częstotliwościowych estymatorów komponentów szeregu czasowego (prawy) dla metody TRAMO/SEATS**



Oznaczenia: czerwony – trend, niebieski – składnik sezonowy, różowy – komponent nieregularny, granatowy – szereg wyrównany sezonowo.

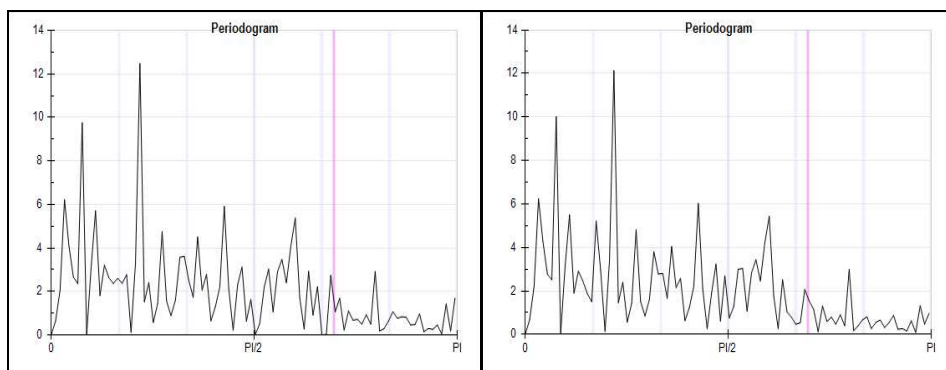
Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Na podstawie wykresu kwadratów charakterystyk częstotliwościowych ponownie można stwierdzić, że w szeregu odsezonowanym zawiera się znacząca (powyżej 95% poza częstotliwościami sezonowymi) część wariacji szeregu oryginalnego, co jest własnością pożądaną dekompozycji.

Rysunek 5.3.4 zawiera kolejne informacje przydatne zarówno do diagnostyki modelu i dekompozycji, jak i do wnioskowania o charakterze szeregu czasowego. Periodogram sporządzony dla oczyszczonych z wahań sezonowych cen wołowiny pozwala scharakteryzować zachowanie tego szeregu nieco inaczej niż pozostałe dwa gatunki żywca. Po pierwsze, nie widać już tutaj efektu „cyklu świńskiego” (wahań cyklicznych o częstotliwości 46 miesięcy). Można jednocześnie wyróżnić dwa inne cykle: pierwszy o długości okresu równej nieco ponad dwa lata (ok. 26 miesięcy) oraz drugi, znacznie krótszy, o impulsie występującym raz na 9 miesięcy. Ponadto na rysunku widać, że wahania o wysokich częstotliwościach mają mniejszy wkład w zachowanie szeregu niż wahania o częstotliwościach relatywnie wyższych. A ponieważ to właśnie niższe częstotliwości włączane będą do komponentu trend-cykl, to właśnie ta składowa bę-

dzie miała decydujący wpływ na dynamikę cen żywca wołowego. Na podstawie periodogramu widać także, że zarówno metoda X-12-ARIMA, jak i TRAMO/SEATS skutecznie usunęły sezonowość. Również wartość periodogramu związana z częstotliwością efektu dni tygodnia nie budzi zastrzeżeń.

**Rysunek 5.3.4. Periodogramy postaci stacjonarnej szeregu wyrównanego sezonowo metodami: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



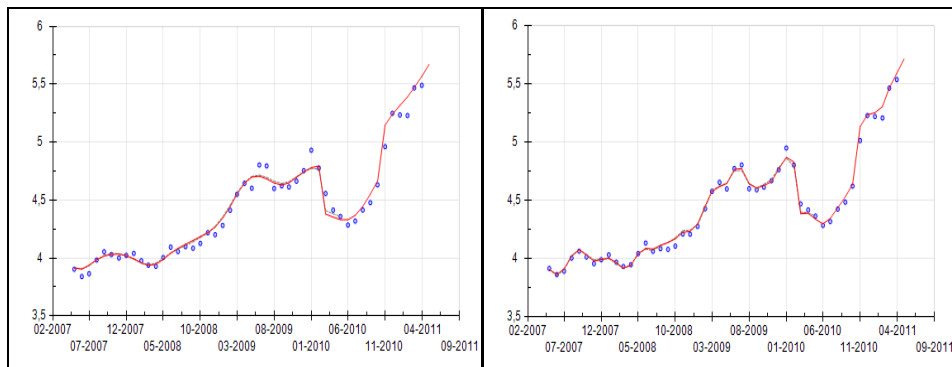
Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

Dla oceny stabilności oszacowań komponentów pochodzących z obu algorytmów, na rysunku 5.3.5 przedstawiono przykładowo historię rewizji trendu. Istotne korekty tej składowej w przypadku obu modeli związane były z występowaniem nietypowych obserwacji w szeregu czasowym. Poza opisanymi już powyżej uwarunkowaniami dla nietypowego zachowania się cen żywca wołowego na początku i pod koniec 2010 r., skutkującymi wprowadzeniem do modeli odpowiednich zmiennych zero-jedynkowych, zarówno X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS odnotowały dużą różnicę między szacunkiem wstępnym i ostatecznym trendu także dla lutego 2011. Tym razem zaskoczeniem z punktu widzenia szacunków trendu był silny wzrost cen w marcu 2011, spowodowany prawdopodobnie wzrostem popytu eksportowego (nowymi możliwościami wywozu do Turcji). W przypadku modelu X-12-ARIMA była jedna istotna rewizja<sup>52</sup> więcej. Podsumowując, można powiedzieć, że istotnych korekt szacunków tego komponentu było w przypadku tego szeregu nieco więcej niż dla pozostałych dwóch szeregów cen żywca. Można powiązać to spostrzeżenie z faktem, iż linearyzacja szeregu cen wołowiny wymagała wykorzystania większej liczby regresorów deterministycznych. Szereg ten jest bardziej podatny na gwałtowne zmiany poziomu oraz na występowanie obserwacji nietypowych i w związku

<sup>52</sup> Rewizje, dla których wartość różnicy między wartością wstępną i wartością ostateczną oszacowania jest wyższa niż dwukrotność RMSE.

z tym można spodziewać się nieco mniejszej stabilności oszacowania poszczególnych obserwacji trendu-cyklu.

**Rysunek 5.3.5. Historia rewizji trendu-cyklu uzyskanego metodami: X-12-ARIMA (lewy) i TRAMO/SEATS (prawy)**



Oznaczenia: czerwony – oszacowanie ostateczne trendu, niebieski – oszacowanie wstępne trendu.

Źródło: Opracowanie własne, wykonane w pakiecie Demetra+.

W tabeli 5.3.4 zamieszczono statystyki oceniające jakość dekompozycji wykonanej metodą X-12-ARIMA. Na ich podstawie można dojść do wniosku, że dekompozycja jest dopuszczalna, choć wyekstrahowane komponenty nie spełniają w pełni stawianych im założeń. Wartość zbiorczej statystyki Q mieści się poniżej granicy równej 1, jednak analizując wartości poszczególnych statystyk wchodzących w skład Q można zauważyć, że statystyki M8 i M10 przekraczają wartość dopuszczalną. Oznacza to, że zarówno w całym szeregu, jak i w próbie obejmującej ostatnie trzy lata, krótkookresowe quasi-losowe zaburzenia mogą mieć zbyt dużą wartość lub mocno się zmieniać w czasie. Może to powodować, że oszacowane składniki losowe nie będą wiarygodne. Wynik tej statystyki potwierdza wizualną ocenę czynników sezonowych oraz wyniki testów sezonowości na podstawie wyników metody X-12-ARIMA.

**Tabela 5.3.4. Miary jakości sezonowej korekty danych dla metody X-12-ARIMA**

Miara	Wartość statystyki testowej	Miara	Wartość statystyki testowej
M1	0,336	M7	0,985
M2	0,117	M8	1,221
M3	0,000	M9	0,995
M4	0,952	M10	1,040
M5	0,192	M11	0,000
M6	0,518	Q	0,608

Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.



Z kolei dekompozycja dokonana za pomocą TRAMO/SEATS wypada pomyślnie w świetle testów walidacyjnych. Zarówno analiza wariancji komponentów i ich estymatorów (zob. tabela 5.3.5), jak i testy istotności korelacji pomiędzy komponentami (zob. tabela 5.3.6) prowadzą do stwierdzenia, że założenia modelu zostały spełnione i jakość dekompozycji jest akceptowalna.

Wariancja estymatorów teoretycznych oraz wariancja oszacowanych wartości komponentów są do siebie zbliżone (por. tabela 5.3.5). Na podstawie powyższego testu nie można stwierdzić, żeby wariancja któregokolwiek z komponentów została istotnie niedoszacowana lub przeszacowana.

**Tabela 5.3.5. Wariancja komponentów i ich estymatorów uzyskanych za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Komponent	Estymator teoretyczny	Estymacja	Poziom istotności
Trend	0,5604	0,3204	0,3043	0,7201
Szereg skorygowany	1,2363	1,0673	0,9990	0,6056
Komponent sezonowy	0,9771	0,0381	0,0446	0,7023
Komponent nieregularny	0,1127	0,0378	0,0353	0,6419

*Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.*

W tabeli 5.3.6 widać, że korelacje pomiędzy dowolnymi parami komponentów są bardzo niskie. Spostrzeżenie to potwierdzają testy istotności współczynnika korelacji. Dla każdej z par komponentów sugeruje on, że nie ma podstaw do odrzucenia stwierdzenia, iż korelacje między komponentami są równe zeru (przy bardzo wysokiej wartości p). Stąd można uznać, że poszczególne komponenty są od siebie niezależne.

**Tabela 5.3.6. Korelacje między składowymi szeregów czasowych uzyskanymi za pomocą metody TRAMO/SEATS**

Wyszczególnienie	Estymator teoretyczny	Estymacja	Poziom istotności
Trend/Komponent sezonowy	-0,0870	-0,0648	0,7543
Trend/Komponent nieregularny	0,0749	0,0602	0,8654
Komp. sezonowy/Komp. nieregularny	0,0256	0,0286	0,9061

*Źródło: Opracowanie własne, obliczenia wykonane w pakiecie Demetra+.*

## Podsumowanie

- Z przedstawionej analizy wynika, że zmiany cen wołowiny wykazują nieco inny charakter niż ceny pozostałych dwóch gatunków żywca. Ich poziom w dużo większym stopniu wyznaczany jest przez długookresowy trend, a wpływ czynnika sezonowego jest mniej ewidentny. Wyodrębnione wahania cykliczne nie obejmują „cyklu świńskiego”, jak w przypadku cen trzody

i cen żywca drobiowego, ale mają własną, odrębną strukturę (dominacja cykli 9-miesięcznych oraz o okresie dwa lata i trzy miesiące). Z uwagi na krótki okres analizy oraz konwergencję cen krajowych do cen unijnych nie są widoczne typowe cykle bydlęce. Z pewnością do tej odmienności w dużym stopniu przyczynia się niewielka produkcja na rynek polski i proeksportowe nastawienie producentów wołowiny oraz specyficzne instrumenty polityki rolnej stosowane na tym rynku.

- Z punktu widzenia prognozy warto uwzględnić fakt, iż ceny wołowiny podlegają co pewien czas gwałtownym zmianom poziomowi i kierunku. W niniejszej analizie wpływ tych zmian był modelowany przy pomocy odpowiednich regresorów, jednak często tego typu zmiany mają charakter szokowy i zwiększają niepewność prognozowania. Jak pokazują wyniki badań, właśnie tego typu wydarzenia nietypowe powodują również często rewizje oszacowań komponentów.
- Wzorzec wahań sezonowych również różni się od tego, który obserwowaliśmy dla cen trzody chlewnej oraz żywca drobiowego. Czynniki sezonowe mają charakter zmienny w czasie, co może być argumentem za stosowaniem w prognozowaniu modeli typu SARIMA, które lepiej są w stanie uwzględniać modyfikacje wzorca sezonowego niż modele oparte na sezonowości deterministycznej. Prognozy czynnika sezonowego wywodzące się z obydwu modeli sugerują, że będzie on wahał się w poszczególnych miesiącach od ok. -4,2% i -3,8% w listopadzie 2011 do 3,6-4,0% w marcu 2012 r. Dzieje się tak pomimo, iż średnie wartości czynnika sezonowego wewnątrz próby dla listopada wynoszą od -2,4% do -2,9% (w zależności od metody dekompozycji), a dla marca +2,3%. W przypadku sezonowości ruchomej należy więc pilnie analizować kierunek i tempo zmian wzorca.
- Wyspecyfikowane i oszacowane za pomocą X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS modele prognostyczne spełniają wszystkie założenia co do rozkładu, niezależności i liniowości reszt. Jednocześnie jednak wydaje się, że dekompozycja szeregu metodą TRAMO/SEATS dała lepsze wyniki (zgodność własności komponentów z założeniami). Dekompozycja metodą X-12-ARIMA skutkuje oszacowaniem czynników sezonowych, których zasadność nie została w pełni potwierdzona przez testy formalne.



## 6. Weryfikacja empiryczna metod prognostycznych

Do prognozowania cen surowców rolnych wykorzystać można wiele modeli szeregów czasowych. Bazują one często na różnych założeniach wynikających z przyjmowanych przesłanek teoretycznych. W naszym przypadku brano pod uwagę modele ARIMA oraz inne (RegARIMA, TRAMO) stanowiące rozszerzenie metodyki ARIMA. W tym rozdziale podjęto zagadnienie oceny trafności *ex post* prognoz uzyskiwanych na podstawie różnych modeli szeregów czasowych omówionych teoretycznie w rozdziale drugim i trzecim<sup>53</sup>.

Dość powszechnie stosowanym podejściem do wyboru metody/modelu jest opieranie się na jakości modelu (dopasowanie, rozkład błędów itp.). Okazuje się jednak, że poszczególne modele, mimo podobnej dobroci dopasowania do danych empirycznych, z racji odmiennych konstrukcji generują różne prognozy. Stąd nasze dociekania zmierzające do odpowiedzi, które modele mają największe zdolności przewidywania cen surowców rolnych i czy są one konkurencyjne w stosunku do modeli jakościowych (opinii ekspertów).

### 6.1. Metodyka oceny przydatności metod

Rozważając trafność czynionych prognoz w języku ekonometrii, czy szerzej matematyki, operuje się pojęciem błędu prognozy. Dokonując oceny błędu prognozy możemy oprzeć się na jednym z dwóch podstawowych podejść. Pierwsze z nich, zastosowane w niniejszej pracy, dotyczy szacowania błędu prognoz na podstawie informacji *ex post*. Wiąże się ono z oceną, w jakim stopniu prognozy wykonywane w przeszłości różnią się od danych rzeczywistych. Zaletą tego podejścia jest możliwość oceny, na ile potencjalne metody prognostyczne umożliwiają przewidywania momentów zwrotnych zmian cen surowców rolnych.

Drugie podejście związane jest ze stochastycznym szacowaniem błędu prognozy na podstawie informacji *ex ante* [Guzik i inni 2007]. Istotą szacowania błędu prognozy na podstawie informacji *ex ante* jest określenie statystycznych charakterystyk przyszłych prognoz na podstawie określonych cech modelu prognostycznego określających m.in. dopasowanie modelu.

---

<sup>53</sup> Po pierwsze, modele te stanowią dobre uogólnienie wielu innych podejść, stąd wybrano je do badań. Po drugie, nie dla wszystkich modeli można wykonać obiektywną analizę *ex post* prognoz wygasłych. Np. nie można zrobić tego dla metody wskaźników (dekompozycji), w której prognoza wahań cyklicznych bazuje na założeniach prognosty.

Oprócz oceny prognoz wygasłych sporządzanych na podstawie modeli przedstawionych we wcześniejszych częściach pracy, dokonamy również porównania tych prognoz z prognozami naiwnymi, jak również z prognozami eksperckimi sporządzonymi przez Zespół Ekspertów powołanych przez Prezesa Agencji Rynku Rolnego (ARR).

### 6.1.1. Metodyka oceny prognoz wygasłych

Ocena dokładności na podstawie informacji *ex post* – nazywana też oceną dokładności prognoz wygasłych – polega na porównaniu wartości prognozowanej z faktyczną. Nie oznacza to oczywiście wymogu oczekiwania aż do okresu wygaśnięcia ostatniej z prognoz. W celu natychmiastowego sporządzenia oceny zdolności prognostycznej dokonuje się bowiem sztucznego skrócenia zakresu czasowego danych statystycznych. Skracanie szeregu czasowego pociąga za sobą wymóg ponownego szacowania parametrów modelu i dopiero na jego podstawie obliczanie prognoz. Należy jednak pamiętać, że nie ulega zmianie postać modelu prognostycznego, którego wybór został dokonany na podstawie szeregu czasowego o maksymalnej dostępnej długości. Należy więc z góry założyć, że błędy prognoz wygasłych będą najprawdopodobniej niższe niż ostatecznych prognoz dotyczących nieznannej przyszłości.

Rysunek 6.1.1. Schemat oceny dokładności prognoz wygasłych



Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 6.1.1 przedstawiono schemat obliczania prognoz wygasłych. Ogólne analizy (rozdział 4-5) były prowadzone w oparciu o dane do maja 2011 roku. W celu obliczenia prognoz wygasłych szeregi czasowe cen były sztucznie skracane. Pierwsza prognoza została obliczona na podstawie danych do marca 2011 roku na kolejne 12 miesięcy. Następnie skracano sekwencyjne dane o kolejne trzy miesiące, szacowano nowe parametry modelu i obliczano kolejne pro-

gnozy wygaśle na każdy z 12 kolejnych miesięcy. Ostatnią prognozę obliczono na podstawie danych do marca 2008 roku.

W sumie dla każdego analizowanego modelu (i dla danego rynku) obliczono 13 zestawów prognoz wygasłych o horyzoncie od jednego miesiąca do jednego roku. Wykonane prognozy były porównywane z wartościami rzeczywistymi w celu obliczenia stopnia trafności prognoz. Prognozy porównywano z wartościami rzeczywistymi dla okresu od kwietnia 2008 roku do września 2011 roku. Należy przy tym pamiętać, że w przypadku prognoz wykonanych dla szeregu skróconego do marca 2011 roku istniała możliwość wyliczenia błędów prognoz tylko 6 pierwszych okresów, a w przypadku szeregu skróconego do grudnia 2010 roku – 9 pierwszych miesięcy. Na rysunku 6.1.1 ciemnoniebieskim kolorem przedstawiono prognozy wygaśle będące podstawą oceny błędów *ex-post*, zaś kolorem błękitnym te prognozy, które z racji braku informacji o rzeczywistych cenach nie były porównane z wartościami zrealizowanymi.

Niezależnie od wielości różnego rodzaju mierników wykorzystywanych przy ocenie prognoz wygasłych, które przedstawione zostały w dalszej części rozdziału, ich podstawą jest zawsze błąd prognozy w czasie  $t$  ( $E_t$ ), liczony jako różnica między wartością rzeczywistą ( $Y_t$ ) a prognozowaną ( $\hat{Y}_t$ ) na ten sam moment:  $E_t = Y_t - \hat{Y}_t$ .

Dokładność prognoz oceniano w zależności od horyzontu prognozowania. Analizowano błędy prognoz wykonanych na pierwszy, trzeci, szósty, dziewiąty i dwunasty miesiąc. W celu obliczenia przeciętnych błędów w danym horyzoncie prognozowania dokonuje się uśrednienia wartości błędów poszczególnych prognoz. Ponieważ w zależności od tego, czy prognoza była niedoszacowana, czy przeszacowana błąd przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne, we wzorze powinno się używać modułu wartości, tak jak ma to miejsce w wykorzystywanym w pracy średnim bezwzględnym błędzie procentowym (*Mean Absolute Percentage Error – MAPE*), który dany jest wzorem [Cieślak 2005]:

$$MAPE = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \left| \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t} \right| * 100\%, \quad (6.1)$$

gdzie:

$k$  – liczba wykonanych prognoz *ex post*,

$Y_t$  – realizacja zmiennej  $Y$  w momencie  $t$ ,

$\hat{Y}_t$  – prognoza zmiennej  $Y$  na moment  $t$ .

Pewną wadą MAPE jest fakt, że nie spełnia on warunku symetrii, co oznacza, że wyżej oceniane jest przeszacowanie niż niedoszacowanie. By wyeliminować brak symetrii, możemy posłużyć się dostosowanym średnim

względny błąd prognozy w przedziale weryfikacji (*Symmetric Mean Absolute Percentage Error – SMAPE*), którego wzór jest następujący:

$$SMAPE = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \frac{|Y_t - \hat{Y}_t|}{(Y_t + \hat{Y}_t)/2} * 100\%, \quad (6.2)$$

gdzie oznaczenia są takie jak w równaniu 6.1. W odróżnieniu od MAPE, SMAPE jest miarą unormowaną, której wartości należą do przedziału od 0 do 200%.

### 6.1.2. Prognozy naiwne

Obliczenie błędów prognoz *ex post* czy też *ex ante* nie dostarcza nam zbyt wielu informacji, jeżeli nie mamy pewnego odniesienia (benchmarku), który pozwoliłby zrelatywizować ocenę. Najprostszym benchmarkiem są błędy prognoz naiwnych. Naiwnymi nazywamy te prognozy, których konstrukcja jest bardzo prosta i do budowy których wystarczy ograniczona liczba danych. Włączenie metod naiwnych do porównań oceny błędów prognoz ma na celu odpowiedź na pytanie, czy budowanie zaawansowanych modeli szeregów czasowych przynosi jakiegokolwiek korzyści przy prognozowaniu przyszłych zjawisk. Jeśli okazałoby się, że prognozy sporządzane na podstawie metod naiwnych nie są istotnie gorsze od tych, bazujących na zaawansowanej metodycznie analizie szeregów czasowych, tworzenie tych ostatnich pozostawałoby bezcelowe.

Istnieje wiele możliwych konstrukcji prognoz naiwnych. Jedynym ograniczeniem przy ich budowie powinny być założenia mówiące o prostej konstrukcji i ograniczonej liczbie danych potrzebnych do wyliczenia prognozy. W naszych badaniach ograniczono się do dwóch rodzajów prognoz naiwnych. Pierwsza to ta, w której prognoza  $\hat{Y}_{t+h}$  na kolejne okresy objęte horyzontem prognozowania  $h$  równa jest ostatniej zaobserwowanej wartości rzeczywistej w momencie  $t$ :

$$\hat{Y}_{t+h} = Y_t, \quad (6.3)$$

Upraszczając, powyższa prognoza oznacza przyjęcie założenia, że w przyszłości wartości cen pozostaną niezmiennie na poziomie ostatniej obserwacji. Należy jednak mieć świadomość, że w rzeczywistości gospodarczej uczestnicy rynku znają najprostsze prawidłowości rynkowe. W rolnictwie wiążą się one np. z wahaniami sezonowymi. Stąd drugi benchmark stanowi przyjęcie, że prognoza będzie równa wartości rzeczywistej w analogicznym okresie roku poprzedniego:

$$\hat{Y}_{t+h} = Y_{t-s+h}, \quad (6.4)$$

gdzie:  $s$  – liczba sezonów w roku.

Druga z prognoz naiwnych oznacza więc przyjęcie założenia, że ceny w przyszłości będą kształtować się na takim poziomie, jaki obserwowany był w tym samym miesiącu roku poprzedniego. Jej stosowanie jest uzasadnione wówczas, gdy prognozowane zjawisko charakteryzuje się sezonowością.

W tabeli 6.1.1 i 6.1.2 przedstawiono wartości błędów MAPE i SMAPE dla prognoz dokonywanych odpowiednio pierwszą i drugą metodą naiwną. W celu zobrazowania zależności pomiędzy długością horyzontu prognozy a wielkością błędu *ex post* w tablicach zawarto wartości MAPE i SMAPE dla wszystkich prognoz o 12 różnych horyzontach.

**Tabela 6.1.1. Wartość błędów prognoz MAPE i SMAPE dla prognoz naiwnych (według formuły  $\hat{Y}_{t+h}=Y_t$ ) o różnych horyzontach na poszczególnych rynkach**

Rynek	Pszenvica		Żyto		Wieprzovina		Wołowina		Drób		Mleko	
Horyzont prognozy	MAPE	SMAPE	MAPE	SMAPE	MAPE	SMAPE	MAPE	SMAPE	MAPE	SMAPE	MAPE	SMAPE
1	4,90	4,83	7,48	7,32	4,28	4,18	1,94	1,94	3,18	3,20	2,45	2,44
2	10,85	10,47	13,72	13,14	5,18	5,08	3,66	3,71	5,80	5,73	4,05	4,05
3	14,23	13,63	17,21	16,37	8,73	8,81	4,78	4,94	8,20	8,23	5,23	5,28
4	18,17	16,95	22,92	21,43	12,12	11,97	5,83	6,01	9,41	9,63	6,42	6,36
5	23,24	21,54	29,18	27,36	11,53	11,38	7,15	7,41	9,49	9,47	7,75	7,71
6	25,35	23,65	31,89	29,89	12,73	12,71	7,63	8,11	10,40	10,54	8,91	8,95
7	27,30	25,18	35,48	33,34	14,23	13,65	7,40	7,91	11,00	11,22	10,23	10,16
8	26,94	25,70	38,08	36,66	13,17	12,66	8,88	9,45	10,22	10,38	11,31	11,28
9	28,56	27,80	40,45	39,61	12,76	12,63	10,66	11,44	10,46	10,79	12,27	12,35
10	30,98	30,40	43,03	42,56	12,50	11,80	10,55	11,28	9,95	9,99	13,45	13,45
11	30,75	31,60	44,96	45,39	12,11	11,52	11,50	12,34	7,74	7,72	14,78	14,82
12	30,20	31,61	45,84	47,45	12,88	12,91	13,39	14,48	8,32	8,61	15,82	16,06

Źródło: dane GUS i opracowanie własne.

Analiza danych zawartych w tabelach wskazuje, że w analizowanym okresie (IV 2008 – IX 2011) najmniej stabilna sytuacja cenowa występowała na rynku zbóż, na co wskazują stosunkowo najwyższe wartości MAPE i SMAPE. Najmniejszą zmiennością cechowały się ceny mleka i wołowiny, szczególnie w okresie do 6 miesięcy. Dla prognoz 12-miesięcznych najmniejsze błędy prognoz naiwnych dotyczą cen wieprzowiny i mięsa drobiowego.

Tabele dostarczają też innych informacji. Widać, że różnice pomiędzy wielkością błędów MAPE i SMAPE są stosunkowo nieduże, co usprawiedliwia zrezygnowanie w dalszej części pracy z drugiego ze wskaźników. Wpływie to korzystnie na przejrzystość wniosków. Warto zauważyć, że w analizowanym okresie wartość błędów SMAPE jest dla zdecydowanej większości prognoz niż-



sza od wartości MAPE na rynkach zbóż. Wynika to z przebiegu zmian cen na tych rynkach, które powodowały, że częściej dochodziło do przeszacowania prognoz. Miało to wpływ na zawyżenie wartości błędów MAPE.

**Tabela 6.1.2. Wartość błędów prognoz MAPE i SMAPE dla prognoz naiwnych (według formuły  $\hat{Y}_{t+h}=Y_{t-S+h}$ ) o różnych horyzontach na poszczególnych rynkach**

Rynek	Pszenica		Żyto		Wieprzowina		Wołowina		Drób		Mleko	
	MAPE	SMAPE	MAPE	SMAPE	MAPE	SMAPE	MAPE	SMAPE	MAPE	SMAPE	MAPE	SMAPE
1	36,87	34,79	46,14	42,56	15,49	15,70	8,66	9,15	7,50	7,56	17,02	16,39
2	36,14	35,54	47,77	45,15	15,39	15,90	8,67	9,20	6,45	6,53	17,61	16,85
3	37,09	36,03	49,35	47,48	14,06	14,48	10,40	11,08	6,58	6,70	18,13	17,37
4	37,14	35,18	48,36	45,88	15,56	15,78	10,27	10,97	8,49	8,66	17,22	16,62
5	34,97	34,06	48,87	46,61	14,33	14,68	10,33	11,14	7,20	7,35	18,20	17,51
6	35,76	34,41	50,01	48,32	13,81	14,18	11,80	12,73	7,73	7,95	18,88	18,17
7	38,57	36,27	51,21	48,43	15,90	16,08	10,82	11,56	9,17	9,36	18,29	17,64
8	36,36	35,50	51,47	49,14	14,71	15,05	11,01	11,88	7,64	7,81	18,74	18,04
9	33,58	33,34	49,21	48,52	13,92	14,25	12,72	13,73	8,03	8,28	18,55	17,97
10	35,10	34,52	48,05	47,37	15,81	15,87	11,55	12,37	9,42	9,64	16,88	16,62
11	32,97	33,84	48,36	48,15	13,90	13,98	11,41	12,34	7,35	7,58	16,45	16,41
12	30,20	31,61	45,84	47,45	12,88	12,91	13,39	14,48	8,32	8,61	15,82	16,06

Źródło: dane GUS i opracowanie własne.

Zaobserwować można również, że druga z metod naiwnych jest zdecydowanie mniej efektywna dla większości rynków. Dotyczy to szczególnie prognoz budowanych na krótsze okresy. Wyjątkiem – i to tylko do pewnego stopnia – jest rynek mięsa drobiowego, cechujący się wyraźnymi rocznymi cyklami w okresie objętym oceną dokładności prognoz.

### 6.1.3. Prognozy ekspertów ARR

Jak już wspomniano, wyniki oceny błędów prognoz opracowanych na bazie modeli zaprezentowanych w poprzednich częściach pracy będą konfrontowane nie tylko z prognozami naiwnymi. Interesujące będzie również porównanie z prognozami sporządzonymi przez Zespół Niezależnych Ekspertów powołanych przez Prezesa Agencji Rynku Rolnego (w skrócie: Zespół Ekspertów ARR). W tym przypadku ewentualna przewaga prognoz ARR – rozumiana jako mniejsze wartości błędów prognoz – nie oznacza oczywiście bezcelowości korzystania z analizy szeregów czasowych. Jest to bowiem porównanie trafności prognoz wykonanych na podstawie dwu całkowicie odmiennych podejść. Trudno też, czy to podejściu ilościowemu, czy heurystycznemu, odmówić racjonalnych przesłanek metodologicznych. Prognozy ARR jako powszechnie uznane źródło prognoz rynkowych są doskonałym materiałem porównawczym.

Prognozy ARR są sporządzane przy wykorzystaniu metody zbliżonej do delfickiej. Metoda ta polega na wykorzystaniu wiedzy, doświadczenia i opinii uznanych ekspertów z danej dziedziny. Prognozę uzyskuje się w przypadku tej metody poprzez przeprowadzenie serii ankiet wśród ekspertów [Cieślak 2005]. Ściślej rzecz ujmując, prognozy ARR wykonywane są dwuetapowo. Pierwszy etap polega na przysłaniu przez ekspertów propozycji prognoz przedziałowych cen artykułów rolnych. Rozpiętość prognoz wynosi 5% dla prognoz trzymiesięcznych i 7,5% dla prognoz dla prognoz półrocznych<sup>54</sup>. Eksperti mogą – ale nie muszą – korzystać z danych statystycznych i wykorzystywać metody statystyczne.

Następnie w oparciu o nadesłane prognozy dokonuje się obliczeń ich wartości przeciętnych, wartości najczęstszych oraz wartości średnich po eliminacji prognoz skrajnych. Jako propozycje do dalszej dyskusji przedstawia się prognozę przedziałową po eliminacji wartości skrajnych. Zespół Ekspertów może zaakceptować propozycję wynikającą z uśrednienia ich wcześniejszych opinii lub – na bazie nowych danych – w toku dyskusji i głosowania optować za prognozą o innej wartości.

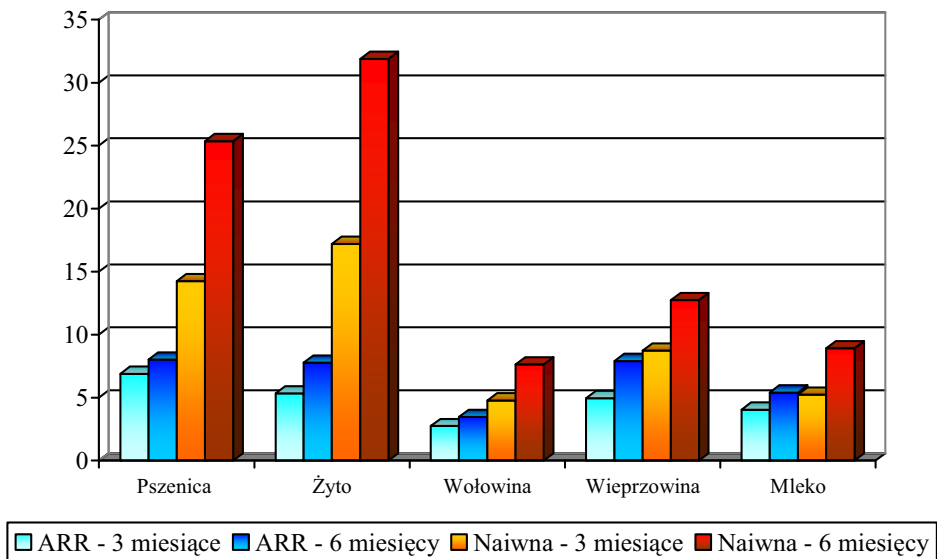
Prognozy eksperckie są sporządzane zawsze w ostatniej dekadzie kwartału (w marcu, czerwcu, wrześniu i grudniu). Stąd mogą być porównywane z prognozami modeli szeregów czasowych wykonywanymi na podstawie danych z porównywalnych okresów. Do porównań wykorzystamy środki przedziałów – średnie wartości prognoz przedziałowych.

Na rysunku 6.1.2 przedstawiono wartości błędów MAPE prognoz Zespołu Ekspertów dokonywanych w analizowanym okresie (kolumny niebieskie) i porównano je z błędami prognoz naiwnych pierwszego typu (kolumny czerwone) na poszczególnych rynkach. Ponieważ prognozy cen żywca drobiowego są wykonywane dopiero od roku 2011, nie jest możliwa ich ocena *ex post* dla badanego okresu.

---

<sup>54</sup> Rozważane tu będą wyłącznie prognozy kwartalne i półroczne, gdyż tylko te są upublicznione. Dodatkowo wykonuje się prognozy których horyzont obejmuje do 5 kwartałów.

**Rysunek 6.1.2. Porównanie wartości błędów MAPE prognoz ARR z prognozami naiwnymi (dla okresu od kwietnia 2008 do września 2011r.)**



Źródło: dane GUS i opracowanie własne.

Zaobserwować można wyraźną przewagę trafności prognoz ARR nad prognozami naiwnymi. Średnio MAPE tych prognoz jest o połowę niższe niż dla prognoz naiwnych. W przypadku prognoz półrocznych cen zbóż MAPE prognoz ARR stanowi jedynie jedną trzecią wartości błędu prognoz naiwnych. Wartość błędów rośnie wraz z horyzontem prognozowania co jest naturalną sytuacją. Relatywnie najmniejsze różnice między błędami prognoz wygasłych ekspertów ARR na 3 i 6 miesięcy są w przypadku cen pszenicy, zaś największe różnice w błędach są dla cen wieprzowiny.

## **6.2. Dokładność prognoz obliczonych z wykorzystaniem modeli RegARIMA oraz TRAMO**

Celem tego podrozdziału jest ocena zdolności prognostycznych jednych z najbardziej zaawansowanych technik modelowania szeregów czasowych wykorzystywanych w praktyce, czyli metod X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS. Będziemy tak oznaczali w skrócie modele mając świadomość, że w istocie były to odpowiednio modele RegARIMA oraz TRAMO wchodzące w skład ww. metod. Modele te zostały teoretycznie opisane w rozdziale 3, zaś ogólna specyfika-

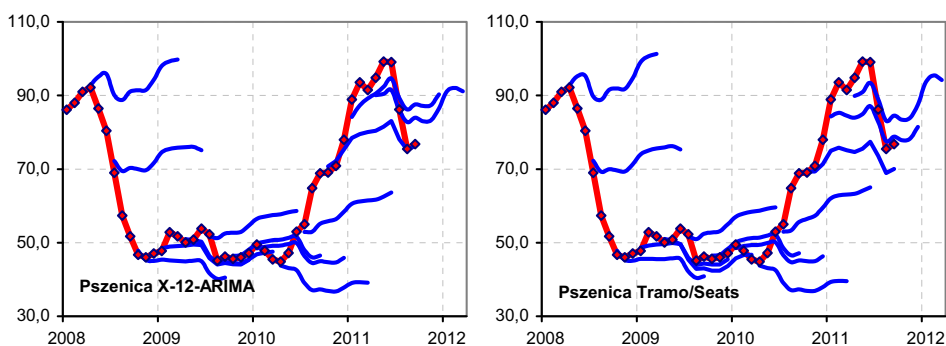
cja tych modeli dla poszczególnych rynków towarowych znajduje się w rozdziałach 4 i 5.

Na podstawie tych modeli obliczono prognozy wygasłe oraz ich błędy. Wartości tych błędów porównane zostaną następnie z błędami prognoz naiwnych oraz Zespołu Ekspertów przy ARR. Analiza wartości MAPE dla prognoz skonstruowanych przy pomocy różnych metod omówiona zostanie w podziale na poszczególne rynki. Zawsze też na początku omawiania każdego z rynków zwrócona zostanie uwaga na sposób, w jaki kształtowały się ceny w okresie, dla którego obliczano prognozy wygasłe. Pozwoli to zrozumieć różnice w wartościach błędów prognozy pomiędzy poszczególnymi rynkami, które obserwowane były także dla prognoz naiwnych.

## Pszenica

Na rysunku 6.2.1 przedstawiono prognozy wygasłe cen pszenicy na tle danych rzeczywistych. Czerwone linie przedstawiają przebieg faktycznych cen pomiędzy styczniem 2008 roku a wrześniem roku 2011. Linie niebieskie obrazują prognozy wygasłe wykonane w kolejnych kwartałach począwszy od marca 2008 roku.

**Rysunek 6.2.1. Prognozy wygasłe cen pszenicy uzyskane na podstawie metod: X-12-ARIMA i Tramo/Seats (zł/dt)**



Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

*Źródło: opracowanie własne.*

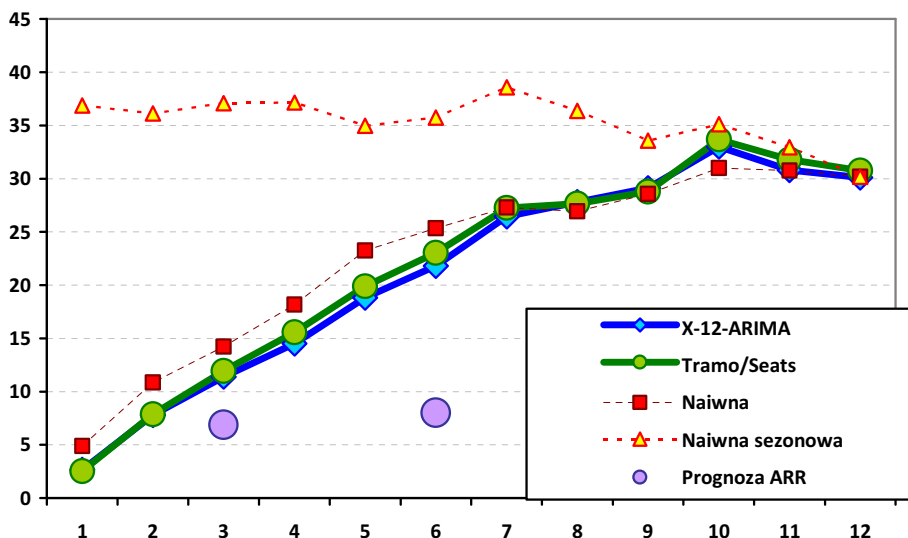
W przypadku pszenicy sytuacja cenowa w analizowanym okresie była dość specyficzna. Wystąpiło bowiem kilka punktów zwrotnych, które zawsze stanowią najtrudniejszy test dla prognoz. W marcu 2008 roku ceny znacznie się obniżyły, osiągając poziom sprzed nagłego wzrostu z II połowy 2007 roku. Kształt niebieskich linii wskazuje, że zarówno na bazie metody X12-ARIMA, jak i TRAMO/SEATS nie udało się skonstruować prognoz przepowiadających

załamanie się cen zbóż. Podobnie w połowie 2010 roku prognozy wskazywały na stabilizację cen, podczas gdy doszło do nagłego wzrostu cen.

Rysunek 6.2.1 pozwala na wyciągnięcie jeszcze jednego ważnego wniosku. Widać wyraźnie, że różnice pomiędzy prognozami generowanymi przy użyciu obu omawianych metod różnią się bardzo nieznacznie. Wynika to z dosyć podobnej struktury obydwu modeli (rozdział 3.1). W istocie dopiero prognozy wygasłe obliczane dla danych uciętych w roku 2011 wykazują zauważalne graficznie zróżnicowanie.

Metody X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS zazwyczaj bardzo dobrze radzą sobie z identyfikacją i opisem wahań cyklicznych. Jednak w przypadku rynków rolnych – szczególnie w analizowanym okresie – okazuje się, że modele te dosyć słabo prognozują kierunek zmian cyklicznych w przyszłości. Jak widać na rysunku 6.2.1, w przypadku cen pszenicy prognozy wskazywały najczęściej na utrzymywanie się cen na poziomie bliskim do ostatnio obserwowanego. Tymczasem tutaj z uwagi na to, że wahania cykliczne mają dominujący udział w wahaniami cen, trafność prognozy zależy przede wszystkim od zdolności przewidywania punktów zwrotnych cykli.

**Rysunek 6.2.2. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen pszenicy w zależności od horyzontu prognozowania**



Źródło: opracowanie własne.

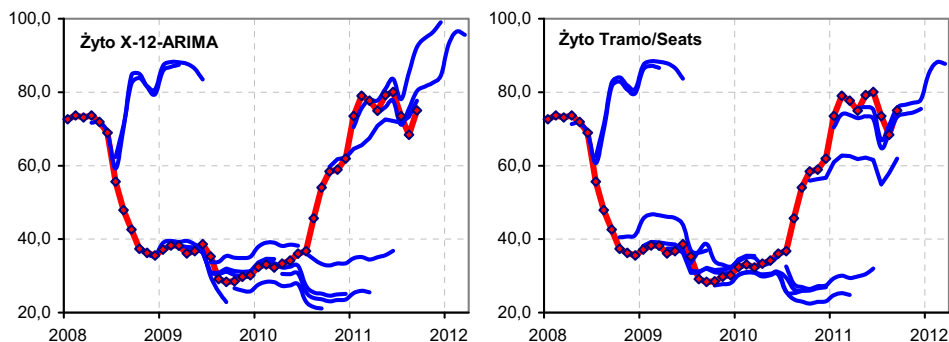
Niska trafność prognoz *ex post* obliczanych przy wykorzystaniu analizowanych metod znajduje swe odzwierciedlenie w wysokim poziomie błędów

MAPE, których wartość przedstawiono na rysunku 6.2.2. Jak widać, poziom błędów prognoz wygasłych tworzonych przy wykorzystaniu obu metod jest bardzo zbliżony. Co więcej, różnice błędów pomiędzy tymi prognozami a opracowanymi na bazie metod naiwnych były stosunkowo nieduże. W przypadku cen pszenicy dla prognoz z horyzontem dłuższym niż półroczny metody naiwne okazują się nawet skuteczniejsze. Najtrafniejsze (w okresie do 6 miesięcy) pozostają prognozy ARR, a zupełnie nietrafione – bazujące na sezonowej metodzie naiwnej, czyli tej, która mówi, że cena równać się będzie cenie występującej w tym samym miesiącu roku poprzedniego.

## Żyto

Ceny żyta kształtowały się w podobny sposób jak w przypadku pszenicy. W połowie 2008 roku doszło więc do spadku cen, a w połowie 2010 roku do kolejnego ich wzrostu, który trwał do lutego 2011 roku. Stąd też podobny kierunek błędów prognoz.

**Rysunek 6.2.3. Prognozy wygasłe cen żyta uzyskane na podstawie metod: X-12-ARIMA i Tramo/Seats (zł/dt)**

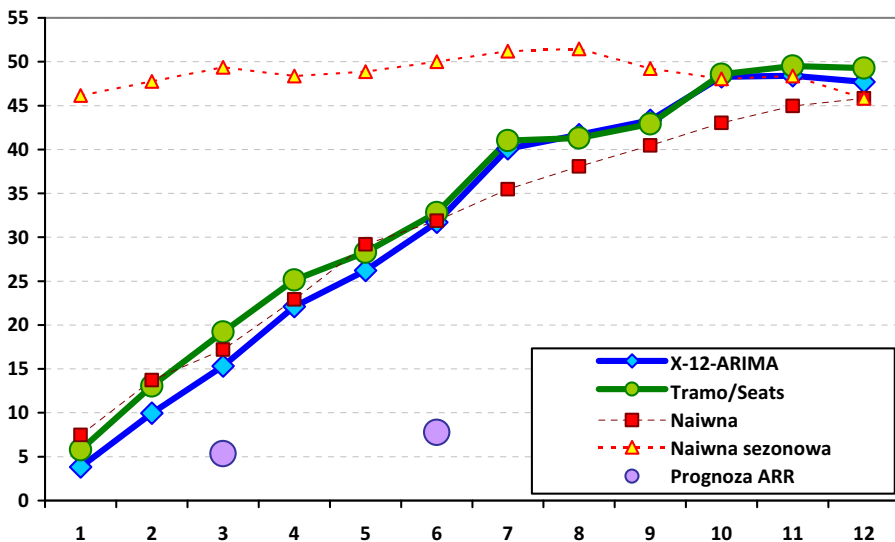


Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

Źródło: opracowanie własne.

Nagłe zmiany cen w większości przypadków nie były ujęte w prognozach bazujących na metodzie X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS (rysunek 6.2.3). Kompletnie nie zostały odzwierciedlone w prognozach prawidłowe kierunki cen w momentach zwrotnych. Modele te reagowały też zbyt późno na zmianę kierunku przebiegu cen (prognozy wykonane w pierwszej połowie 2008 roku). Można uznać, że prognozy te odzwierciedlają zachowania stadne uczestników rynku, a tym samym nie pozwalają na uzyskanie przewagi konkurencyjnej dla ich użytkowników.

**Rysunek 6.2.4. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen żyta w zależności od horyzontu prognozowania**



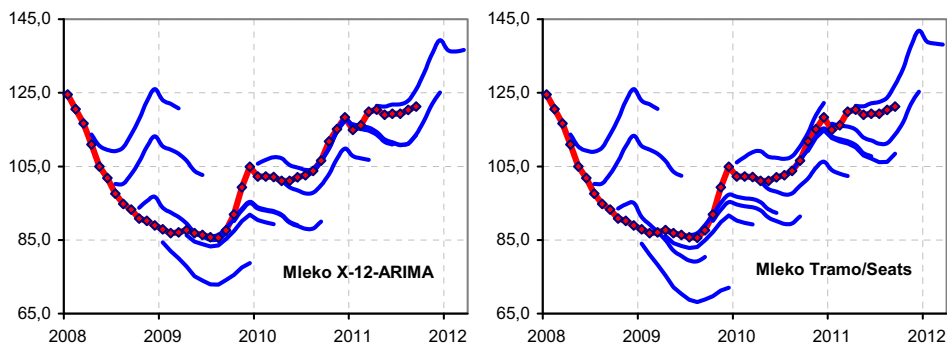
Źródło: opracowanie własne.

Prognozy wygasłe cen żyta obliczane z wykorzystaniem omawianych metod nie okazały się lepsze od prognoz konstruowanych metodą naiwną (rysunek 6.2.4). Błędy MAPE dla tych ostatnich okazały się nawet niższe niż dla prognoz X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS. Za najtrafniejsze ponownie należy uznać prognozy ARR. Wysokie błędy prognoz cen żyta (wyższe niż pszenicy) są po części spowodowane zmianą procesu generującego zachowanie cen żyta wraz ze wstąpieniem Polski do Unii Europejskiej (rozdział 4.2) oraz niską, w porównaniu do pszenicy, płynnością rynku. Znaczna przewaga w dokładności prognoz eksperckich wskazuje, że informacja o tym, co było, nie jest wystarczająca do uzyskania trafnych prognoz – ważne są również inne bieżące doniesienia o sytuacji na rynkach światowych, poczynaniach polityków, prognozach zbiorów itp.

## Mleko

W analizowanym okresie na rynku mleka doszło do zmiany kierunku trendu spadkowego – najbardziej gwałtowny spadek cen w ostatnich 20 latach – na wzrostowy (rysunek 6.2.5). W pierwszym okresie, kiedy ceny charakteryzowały się spadkową tendencją, prognozy obliczone za pomocą obu metod były znacząco przeszacowane.

**Rysunek 6.2.5. Prognozy wygasłe cen mleka uzyskane na podstawie metod: X-12-ARIMA i Tramo/Seats (zł/hl)**



Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

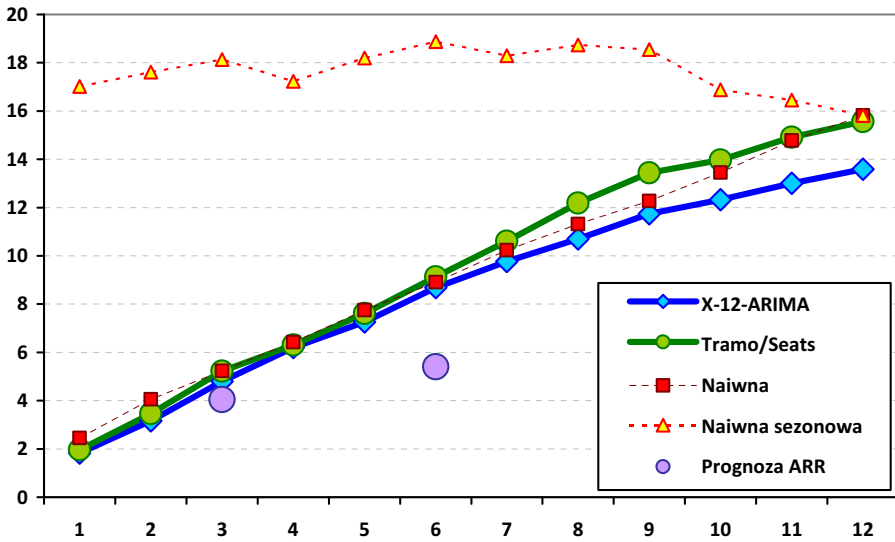
Źródło: opracowanie własne.

Trafność prognoz poprawiła się znacząco w okresie wzrostowym cen, gdy następowała powolna korekta cen przerywana sezonowymi wahaniami. Należy jednak zaznaczyć, że moment zwrotny nie został wychwycony ani przy wykorzystaniu metody X-12-ARIMA, ani TRAMO/SEATS. Również eksperci ARR nie przewidzieli aż takiego załamania cen. Prognozy te przypominają zachowania ogółu inwestorów: dosyć późno odkrywana jest rzeczywista tendencja, a kiedy ogół rynku zaakceptuje trend i przyłączy się do kupujących lub sprzedających następują zmiany kierunku trendu.

Wartość błędów prognoz wygasłych z obu rodzajów modeli jest porównywalna, aczkolwiek widać pewną przewagę metody X-12-ARIMA dla prognoz o horyzoncie przekraczającym pół roku. Podobnie jednak jak i w przypadku prognoz cen innych omawianych produktów rolnych, wykazanie celowości stosowania metod obliczanych przy pomocy programu DEMETRA+ tylko na podstawie różnic wartości MAPE w stosunku do metody naiwnej byłoby bardzo trudne do przeprowadzenia. Jak widać na rysunku 6.2.6 różnice te są niewielkie. Po raz kolejny zaobserwować można wyższość prognoz opracowanych przez ARR – szczególnie dla prognoz 6-miesięcznych. Przy czym nie są to tak duże różnice, jak w przypadku cen zbóż.



Rysunek 6.2.6. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen mleka w zależności od horyzontu prognozowania

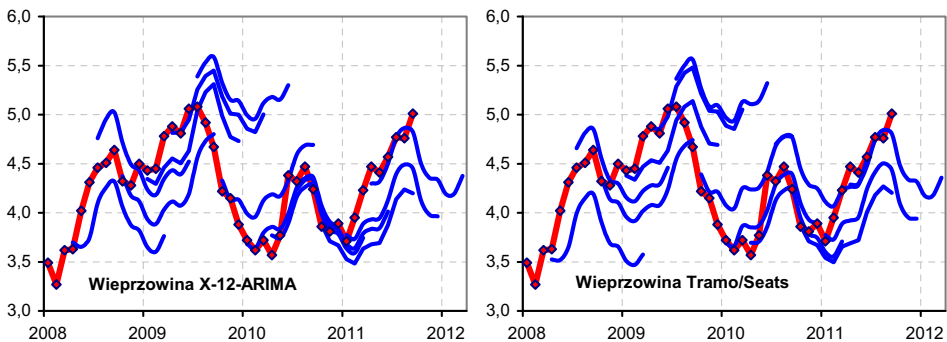


Źródło: opracowanie własne.

### Źywiec wieprzowy

Wahania cen na rynku wieprzowiny w analizowanym okresie były o wiele mniejsze niż w przypadku zbóż. Podążały one ustalonymi wzorcami cyklicznymi i sezonowymi (rozdział 5.1). Stąd dokładność prognoz w przeważającej mierze zależy od uchwycenia dynamiki powyższych wahań.

Rysunek 6.2.7. Prognozy wygasłe cen żywca wieprzowego uzyskane na podstawie metod: X-12-ARIMA i Tramo/Seats (zł/kg)

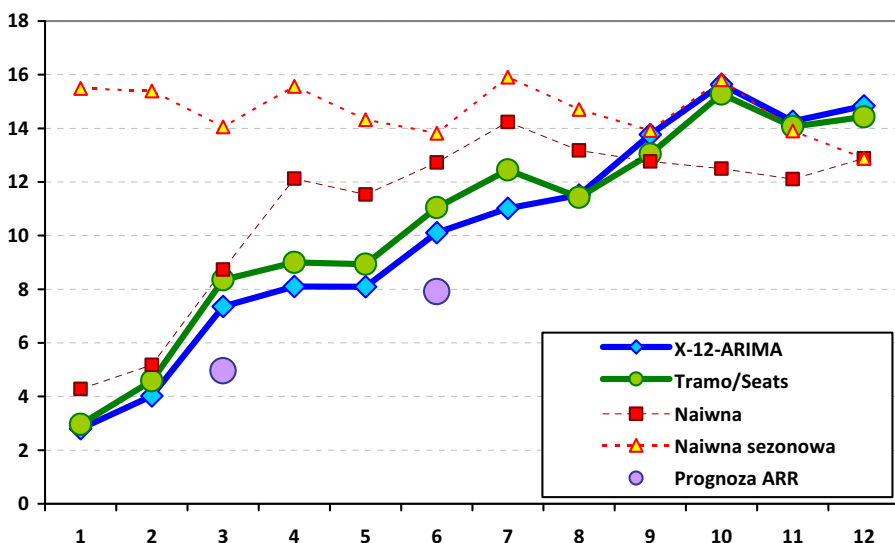


Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

Źródło: opracowanie własne.

Kształtowanie się cen zgodnie z wcześniej obserwowanymi i zidentyfikowanymi zmianami cyklicznymi i sezonowymi przyczyniło się do zdecydowanie większej trafności prognoz. O ile kształt prognozowanych wahań sezonowych odpowiada w zasadzie przebiegowi cen, to nie do końca modele uwzględniają kierunek zmian długookresowych (cyklicznych). Podobnie jak przypadku prognoz cen zbóż, tak i tutaj różnice pomiędzy dwiema metodami są niewielkie i raczej trudne do wychwycenia na wykresie przedstawiającym kształt prognoz wygasłych (rysunek 6.2.7).

**Rysunek 6.2.8. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen mięsa wieprzowego w zależności od horyzontu prognozowania**



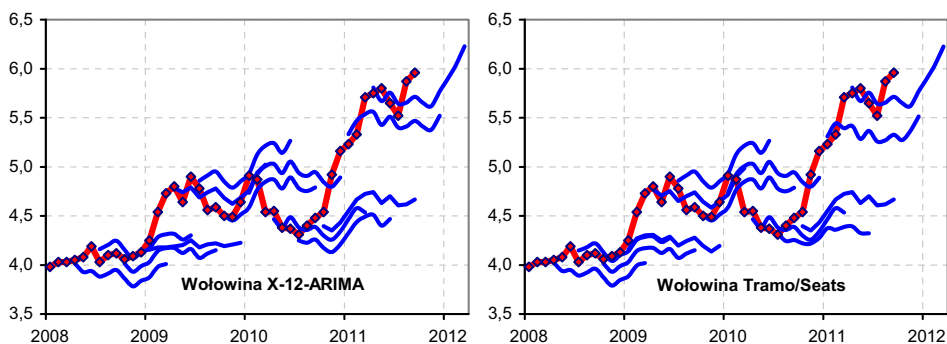
Źródło: opracowanie własne.

Znacząco lepsze dopasowanie prognoz wygasłych do faktycznych cen znajduje potwierdzenie w rysunku 6.2.8, gdzie przedstawiono obliczone wartości MAPE. Maksymalna wartość MAPE dla obu metod oscyluje w granicach 16% (przy blisko 50% dla prognoz cen żyta). Przewaga trafności prognoz ARR nie jest już tak znaczna. Błędy prognoz ekspertów na trzeci i szósty miesiąc są o około 2 p.p. niższe od prognoz uzyskiwanych na podstawie metody X-12-ARIMA. Dalej jednak niepokoić powinna mniejsza wartość błędów prognoz naiwnych przy horyzontie prognozy przekraczającym 8 miesięcy. Podobnie jak w przypadku dwóch uprzednio analizowanych rynków, metoda X-12-ARIMA jest minimalnie efektywniejsza od TRAMO/SEATS dla prognoz półrocznych i krótszych.

## Żywiec wołowy

Ceny żywca wołowego w analizowanym okresie charakteryzowały się silnym trendem wzrostowym. Równocześnie w okresie objętym analizą *ex post* mieliśmy do czynienia ze zmianą nietypową w roku 2010 polegającą na gwałtownym spadku cen, a później ich powrotowi do tendencji wzrostowej. Ceny oraz prognozy przedstawiono na rysunku 6.2.9.

**Rysunek 6.2.9. Prognozy wygase cen żywca wołowego uzyskane na podstawie metod: X-12-ARIMA i Tramo/Seats (zł/kg)**



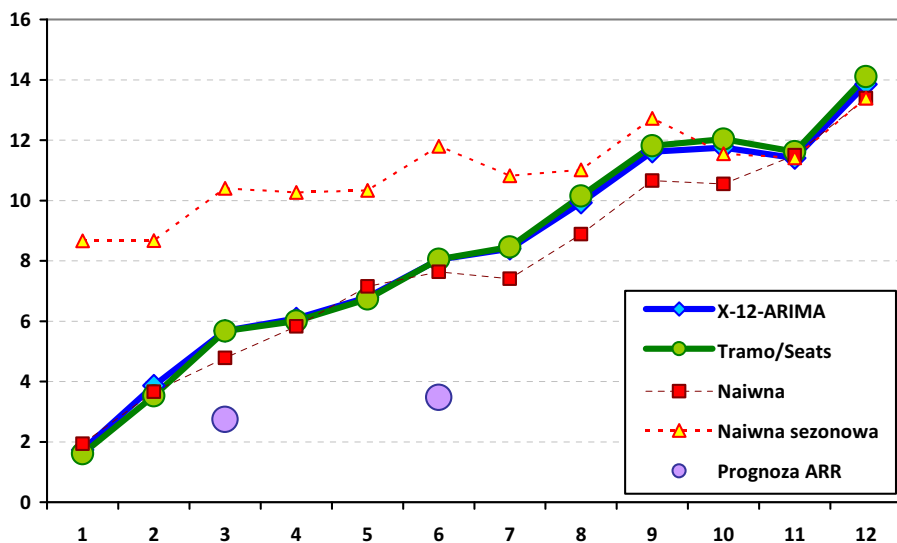
Oznaczenia: prognozy wygase – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

Źródło: opracowanie własne.

Wydaje się, że prognozy obliczane z wykorzystaniem obydwu metod nie uwzględniały w sposób prawidłowy dynamiki zmian w okresach występujących po momentach zwrotnych. Gwałtowne zmiany poziomu cen miały miejsce na przełomie roku 2008/09 oraz we wspomnianym wcześniej roku 2010. Błędy prognoz po tych momentach były najwyższe.

Pomimo to wielkość błędów prognoz wygasyłych jest stosunkowo nieduża (MAPE na 12. miesiąc nie przekracza 15%). Jest to poziom porównywalny do błędów prognoz cen mleka i cen wieprzowiny. Jednak liczona za pomocą MAPE trafność prognoz rozpatrywanych metod nie przewyższała trafności prognozy naiwnej. Oznacza to, że ich stosowanie w takiej postaci jest zasadniczo bezcelowe. Trafność prognoz X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS była zdecydowanie niższa niż prognoz wykonanych przez Zespół Ekspertów pracujących przy ARR. Błędy prognoz eksperckich są o ponad połowę niższe niż błędy modeli szeregów czasowych. Zobrazowane to zostało na rysunku 6.2.10.

**Rysunek 6.2.10. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen żywca wołowego w zależności od horyzontu prognozowania**

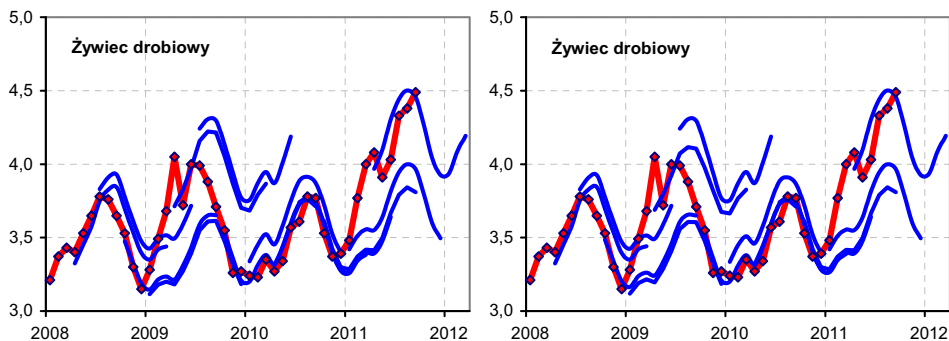


Źródło: opracowanie własne.

### Żywiec drobiowy

Najtrafniejsze spośród prognoz dla wszystkich rynków okazały się te, wykonane przy wykorzystaniu metod X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS dla cen żywca drobiowego. W dużej mierze wynika to ze stabilnego charakteru wahań cen (rysunek 6.2.11).

**Rysunek 6.2.11. Prognozy wygasłe cen żywca drobiowego uzyskane na podstawie metod: X-12-ARIMA i Tramo/Seats (zł/kg)**

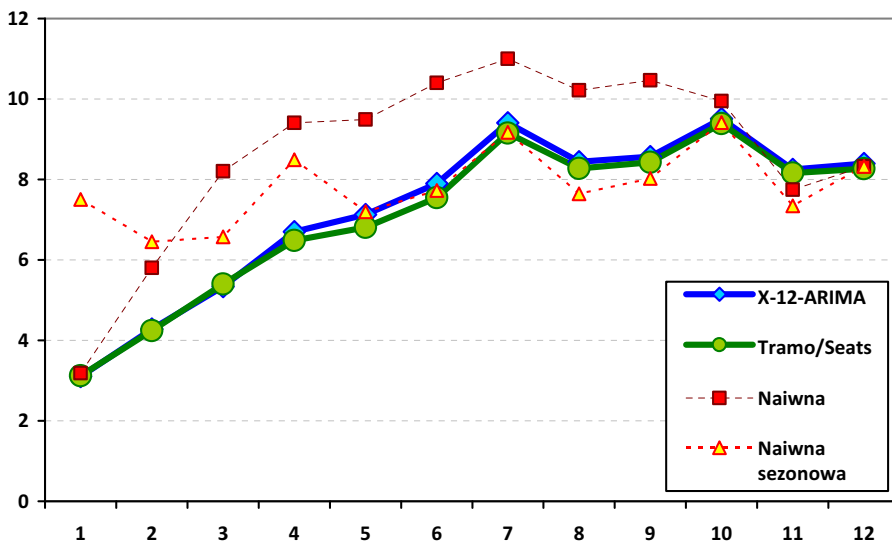


Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

Źródło: opracowanie własne.

Prognozy te trafnie wychwytyją sezonowe wahania występujące w prognozowanym szeregu czasowym. Stosunkowo rzadko dochodzi do znaczących przeszacowań lub niedoszacowań przyszłych wartości cen drobiu. Przeszacowania te wynikają też z niepełnego odzwierciedlenia cyklicznych zachowań cen żywca drobiowego.

**Rysunek 6.2.12. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen żywca drobiowego w zależności od horyzontu prognozowania**



Źródło: opracowanie własne.

Ponieważ ceny drobiu dopiero od niedawna prognozowane są przez Zespół Ekspertów przy ARR, na rysunku 6.2.12 nie zamieszczono wartości MAPE dla tych prognoz. Wyodrębnienie na podstawie wykresów różnic między prognozami uzyskanymi na podstawie metod X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS jest niezmiernie trudne, stąd można uznać brak przewag którejkolwiek z metod. Maksymalna wartość błędów prognoz wygasłych MAPE wyniosła ok. 9,5 (prognozy 10-miesięczne) i dla prawie wszystkich horyzontów prognozy te okazały się lepsze niż te sporządzone na bazie metody naiwnej. Z drugiej strony, ze względu na dominujący roczny cykl zmian cen na tym rynku w przypadku prognoz półrocznych i dłuższych, metoda naiwna sezonowa okazała równie trafna. Pokazuje to, że relatywnie wysoka dokładność powyższych prognoz jest raczej kwestią regularnego przebiegu cen niż wynika z jakości modeli prognostycznych.

### **Komentarz podsumowujący:**

- Modele szeregów czasowych, oparte na metodach X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS, które charakteryzowały się dobrymi własnościami statystycznymi nie pozwoliły na uzyskanie prognoz przeciętnie dokładniejszych od prognoz uzyskiwanych na podstawie modeli naiwnych.
- Prognozy te były zdecydowanie gorsze od prognoz eksperckich. Pokazuje to, że opieranie się tylko na informacjach o przeszłości prognozowanego zjawiska może być niewystarczające.
- Prognozy *ex post* uzyskiwane na podstawie powyższych modeli w ogóle nie umożliwiały odgadnięcia momentów zwrotnych. Kiedy taki moment nastąpił, dosyć późno identyfikowały zmiany. Może to wynikać z konstrukcji modeli, które preferują krótkookresowe dynamiki kosztem zmian długookresowych.
- Prognozy uzyskiwane na podstawie powyższych modeli można porównać do oczekiwań ogółu rynku. Większość inwestorów również nie potrafi odgadywać kierunku załamania cen.

### **6.3. Dokładność prognoz obliczonych z wykorzystaniem modeli ARIMA**

Dokładność prognoz wygasłych uzyskanych na podstawie modeli wbudowanych w metody X-12-ARIMA oraz Tramo/Seats była dużym zaskoczeniem dla autorów. Zaczęto się zastanawiać, co było przyczyną takiego stanu rzeczy. Analizując modele, które zostały dobierane na podstawie zautomatyzowanych procedur opisanych w rozdziale 3, okazało się, że ich specyfikacje zawierają dwukrotne różnicowanie szeregu czasowego. Zatem zanim oszacowano parametry, dane zostały zróżnicowane z krokiem pierwszym i sezonowym. Takie podejście zapewnia uzyskanie szeregu czasowego stacjonarnego, ale poprzez operacje różnicowania dokonuje się dużych zmian właściwości szeregów czasowych. Innymi słowy, osłabia się zależności długookresowe.

Stąd w kolejnym kroku w zdecydowano się ograniczyć liczbę różnicowań do jednego. Zrezygnowano również ze zmiennych regresyjnych mających na celu wyeliminowanie obserwacji odstających. Jedynym wyjątkiem były szereg czasowy cen wołowiny, gdzie wejściowy szereg czasowy zmodyfikowano z uwagi na skokowy wzrost cen po wejściu do UE.

Zatem prognozy obliczono na podstawie modeli ARIMA(p,d,q)(P,D,Q), w których suma różnicowań wynosi 1 ( $d+D=1$ ). Okazuje się bowiem, jak wska-

zuje przykład szeregu czasowego cen mleka zamieszczony w rozdziale 2.2, że jednokrotne różnicowanie również zapewnia stacjonarność (nie badano tam stacjonarności sezonowej). Specyfikacji modeli dokonano na podstawie danych od stycznia 1996 do maja 2011. Takich samych modeli (tylko oszacowanych na nowo) używano do obliczenia prognoz wygasłych.

Zrezygnowano z automatycznej procedury doboru liczby opóźnień w oparciu o kryteria informacyjne. Przeprowadzając specyfikację modeli, kierowano się wykresami ACF i PACF szeregów czasowych oraz reszt modeli. Starano się tak dobierać parametry (opóźnienia), aby współczynniki ACF i PACF nie wskazywały na zależności w resztach modeli oraz aby ostatnie współczynniki zawarte w modelu były statystycznie istotne. Metodę ARIMA oraz kwestie teoretyczne (i empiryczne na przykładzie cen mleka) identyfikacji opisano w rozdziale 2.

Dla każdego rynku obliczono błędy prognoz wygasłych na podstawie wyspecyfikowanych modeli. Ogólna specyfikacja była przeprowadzona na podstawie danych od stycznia 1996 do maja 2011. Stąd przedstawione w tabelach statystyki dotyczą modeli oszacowanych dla takiego okresu. Modele te oszacowano z wykorzystaniem warunkowej metody największej wiarygodności opartej na algorytmie BHHH<sup>55</sup>. Na podstawie wyspecyfikowanych modeli obliczano prognozy wygasłe wg metodyki przedstawionej w rozdziale 6.1.1. Czyli na nowo szacowano parametry (dla danej specyfikacji modelu) w interwałach trzymiesięcznych i obliczano prognozy wygasłe.

Dla większości rynków przedstawiono błędy prognoz czterech modeli ARIMA: dwóch opartych na danych różnicowanych tylko z krokiem pierwszym i dwóch różnicowanych tylko z krokiem sezonowym. Wyjątkiem jest rynek mleka, dla którego tylko jeden model z różnicowaniem sezonowym okazał się wart wyróżnienia. Wartości błędów tych modeli zaprezentowano wspólnie z błędami prognoz wygasłych prognoz naiwnych (bez sezonowego modelu naiwnego, który okazał się najgorszy i trudno nazwać go dobrym benchmarkiem), prognoz ARR oraz prognoz opracowanych przy wykorzystaniu procedury X-12-ARIMA. Porównanie to stanowić może odniesienie dla oceny efektywności modeli ARIMA z jednokrotnym różnicowaniem.

Dla każdego z rynków przedstawiono wykresy prognoz wygasłych dwóch modeli charakteryzujących się najmniejszą wartością błędów prognoz, przy czym jeden z nich to model z różnicowaniem sezonowym, a drugi z niesezono-

---

<sup>55</sup> Zaproponowana przez E. Berndta, B. Halla, R. Halla i J. Hausmana metoda rozwiązywania równań wiarygodności wykorzystująca pierwsze pochodne funkcji wiarygodności.

wym. Wartości prognoz – tak jak w poprzednich podrozdziałach – przedstawiono na tle cen rzeczywistych.

### 6.3.1. Pszenica

Modele cen pszenicy oparto na danych logarytmowanych. Szeregi czasowe ceny pszenicy (ich logarytmy) mają charakter niestacjonarny, co zostało potwierdzone testem ADF zarówno z wyrazem wolnym, jak i z trendem liniowym (por. rozdział 2). Różnicowanie cen pszenicy z krokiem pierwszym pozwala na uzyskanie stacjonarnego szeregu czasowego. Różnicując tylko i wyłącznie z krokiem sezonowym<sup>56</sup> poziom statystyki tau testu ADF z wyrazem wolnym wynosi -2,69 przy  $p=0,076$ . Zatem jest to szereg bliski stacjonarnemu (kwestia poziomu istotności).

**Tabela 6.3.1. Wybrane charakterystyki modeli ARIMA dla cen (ln) pszenicy**

Model	(2,0,0)(2,1,1)		(2,0,0)(1,1,2)		(1,1,0)(0,0,1)		(1,1,0)(1,0,1)	
Oszacowania modelu								
	Współcz.	p	Współcz.	p	Współcz.	p	Współcz.	P
stała	0,0028	0,1232	0,0012	0,3879	0,0024	0,6810	0,0035	0,6355
phi_1	1,4182	0,0000	1,4229	0,0000	0,4381	0,0000	0,4301	0,0000
phi_2	-0,4810	0,0000	-0,4726	0,0000				
Phi_1	-0,0565	0,3909	-0,3134	0,0028			-0,2097	0,0938
Phi_2	-0,4468	0,0000						
Theta_1	-0,7503	0,0000	-0,3938	0,0002	0,3042	0,0000	0,5294	0,0000
Theta_2			-0,5322	0,0000				
Statystyki resztowe								
AIC	-414,944		-446,122		-512,181		-478,145	
Se	0,0562		0,0569		0,0584		0,0581	
Chi-kwadrat	106,36	0,0000	112,319	0,0000	91,3133	0,0000	94,6943	0,0000
LM <sub>ARCH</sub> (12)	3,5235	0,9905	7,6315	0,8132	15,9385	0,1940	13,9008	0,3070
Q Ljung-Boxa 12	12,7268	0,389	9,6092	0,650	6,8357	0,868	6,3903	0,895

Źródło: opracowanie własne.

Do prognozowania cen pszenicy wybrano cztery modele: dwa różnicowane z krokiem pierwszym, dwa z krokiem dwunastym. Ich wybrane statystyki przedstawiono w tabeli 6.3.1. W modelach tych, oprócz wyrazu wolnego, tylko jeden współczynnik nie jest statystycznie istotny (w modelu (2,0,0)(2,1,1)). W porównaniu do modeli RegARIMA oraz TRAMO dla cen pszenicy zamieszczonych w rozdziale 4.1, modele prezentowane w tabeli 3.3.1 posiadają gorsze

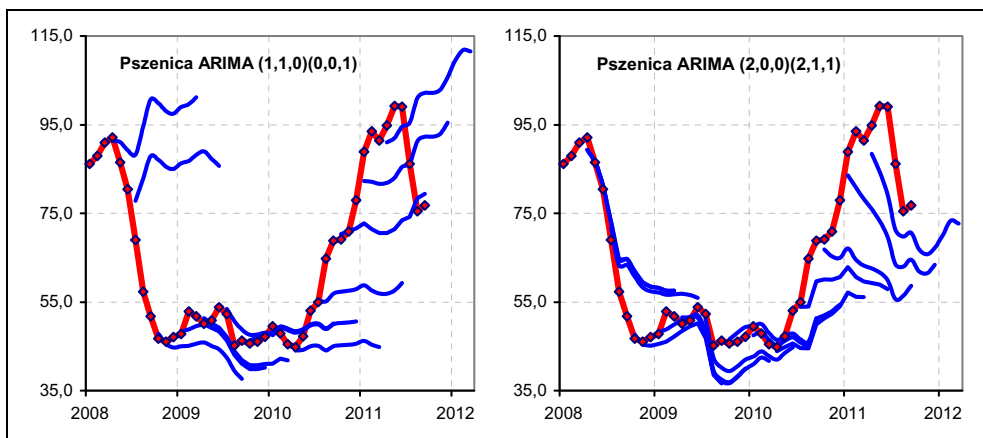
<sup>56</sup> Jak wskazują [Makridakis i inni 1998] różnicowanie z krokiem sezonowym również umożliwia w pewnym stopniu eliminację trendu.



właściwości składnika losowego. Reszty w żadnym z modeli nie posiadają rozkładu normalnego (chi-kwadrat) natomiast – co jest najważniejsze – brak jest w nich zależności linowych (test Ljung-Boxa).

Na podstawie powyższych modeli obliczono prognozy wygasłe oraz ich błędy. Efektywność prognoz modeli ARIMA z jednokrotnym różnicowaniem w przypadku cen pszenicy należy ocenić dwójako. Modele z różnicowaniem sezonowym, których konstrukcja sprawia, że wartości prognozy dążą raczej do wartości średnich, wykazały wysoką trafność. Ma to zresztą związek ze specyficznym przebiegiem cen na rynku zbóż w analizowanym okresie. Ten sam przebieg zmian cen sprawił, że prognozy modeli z różnicowanych z krokiem pierwszym okazały się dużo mniej przydatne. Modele te cechują się bowiem „krótką pamięcią” i podążając za krótkookresowym trendem przeszacowywały wartość prognoz w okresie maksimum cenowych. Odmienne kształt sporządzanych prognoz widać wyraźnie na rysunku 6.3.1.

**Rysunek 6.3.1. Prognozy wygasłe cen pszenicy (zł/dt) uzyskane na podstawie modeli: ARIMA (1,1,0)(0,0,1) i ARIMA (2,0,0)(2,1,1)**



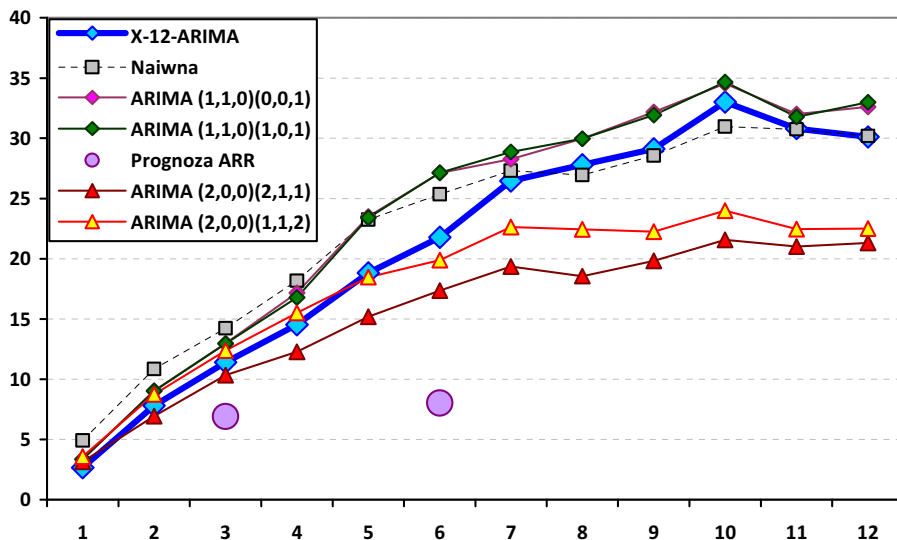
Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

Źródło: opracowanie własne.

Opisane powyżej różnice w charakterystykach prognoz znajdują odzwierciedlenie w wartościach błędów prognoz wygasłych, których wartości przedstawiono na rysunku 6.3.2. Prognozy modeli z jednokrotnym różnicowaniem – kolor różowy i zielony – okazały się najmniej trafne spośród wszystkich ujętych w porównaniu. Dla odmiany prognozy modeli ARIMA różnicowanych z krokiem sezonowym – kolor czerwony i żółty – należy ocenić pozytywnie. Ich trafność dla okresów powyżej 4 miesięcy jest najwyższa spośród prognoz wszystkich dotychczas zaprezentowanych modeli. Wartość błędów prognoz dwuna-

stomiesięcznych tych modeli jest lepsza średnio o blisko 1/3 od innych ujętych w porównaniu. Wciąż jednak najtrafniejsze pozostają prognozy opracowane przez ekspertów ARR.

**Rysunek 6.3.2. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen pszenicy w zależności od horyzontu prognozowania**



Źródło: opracowanie własne.

### 6.3.2. Żyto

Modele cen żyta oparto na danych logarytmowanych. Podobnie jak w przypadku szeregów czasowych cen pszenicy, ich logarytmy mają charakter niestacjonarny, co zostało potwierdzone testem ADF. Szereg stacjonarny uzyskano różnicując ceny żyta z krokiem pierwszym (dla testu bez wyrazu wolnego  $\tau = -8,95$ ;  $p < 0,01$ ). W przypadku różnicowania sezonowego wyłącznie test ADF bez wyrazu wolnego wskazał na istnienie stacjonarności ( $\tau = -2,10$ ;  $p = 0,03$ ).

Wybrano cztery modele, których statystyki przedstawiono w tabeli 6.3.2: dwa różnicowane z krokiem pierwszym, dwa z krokiem dwunastym. Podobnie jak w przypadku cen pszenicy, w ani jednym modelu reszty nie posiadają cech rozkładu normalnego, natomiast nie są wzajemnie skorelowane. Co więcej, tylko w resztach modelu  $(2,0,0)(2,1,1)$  nie występuje efekt ARCH. Większość współczynników – poza wyrazem wolnym – jest statystycznie istotna.

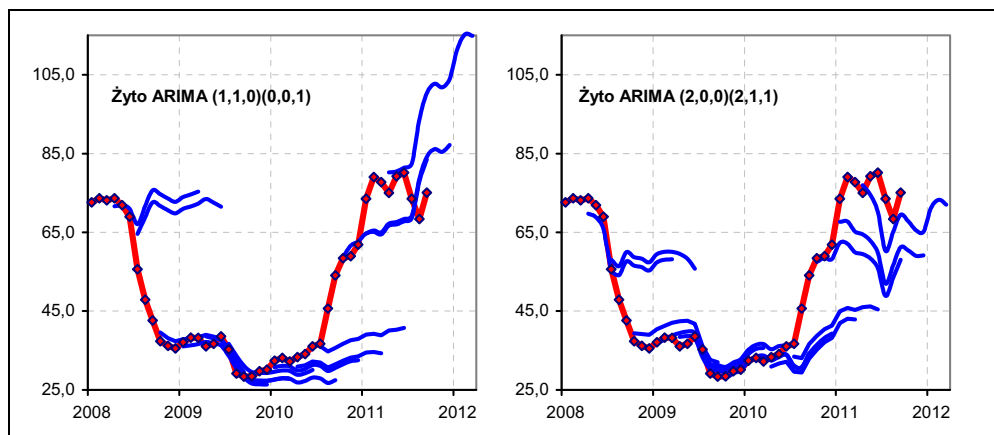
**Tabela 6.3.2. Wybrane charakterystyki modeli ARIMA dla cen (ln) żyta**

Model	(2,0,0)(2,1,1)		(2,0,0)(1,1,2)		(1,1,0)(0,0,1)		(1,1,0)(1,0,1)	
Oszacowania modelu								
	Współcz.	p	Współcz.	p	Współcz.	p	Współcz.	p
stała	0,0038	0,1178	0,0022	0,2893	0,0051	0,4856	0,0051	0,5850
phi_1	1,3440	0,0000	1,3657	0,0000	0,3789	0,0000	0,3727	0,0000
phi_2	-0,4073	0,0000	-0,4095	0,0000				
Phi_1	-0,0206	0,7241	-0,3554	0,0021			-0,1775	0,0139
Phi_2	-0,4855	0,0000						
Theta_1	-0,6599	0,0000	-0,1545	0,1133	0,4813	0,0000	0,6845	0,0000
Theta_2			-0,6076	0,0000				
Statystyki resztowe								
AIC	-389,108		-412,165		-475,568		-443,503	
Se	0,0614		0,0634		0,0646		0,0643	
Chi-kwadrat	25,7259	0,0000	22,7648	0,0000	35,4886	0,0000	30,2266	0,0000
LM <sub>ARCH</sub> (12)	7,2069	0,8436	32,0825	0,0013	30,3614	0,0025	28,4195	0,0048
Q Ljung-Boxa (12)	12,1635	0,433	7,4151	0,829	5,2935	0,947	4,4348	0,974

Źródło: opracowanie własne.

Kształtowanie się prognoz wygasłych cen żyta dla najlepszych modeli różnicowanych z krokiem pierwszym i sezonowym przedstawiono na wykresie 6.3.3. Przebieg prognoz cen żyta jest kierunkowo zbliżony do prognoz cen pszenicy (rysunek 6.3.1).

**Rysunek 6.3.3. Prognozy wygasłe cen żyta (zł/dt) uzyskane na podstawie modeli: ARIMA (1,1,0)(0,0,1) i ARIMA (2,0,0)(2,1,1)**

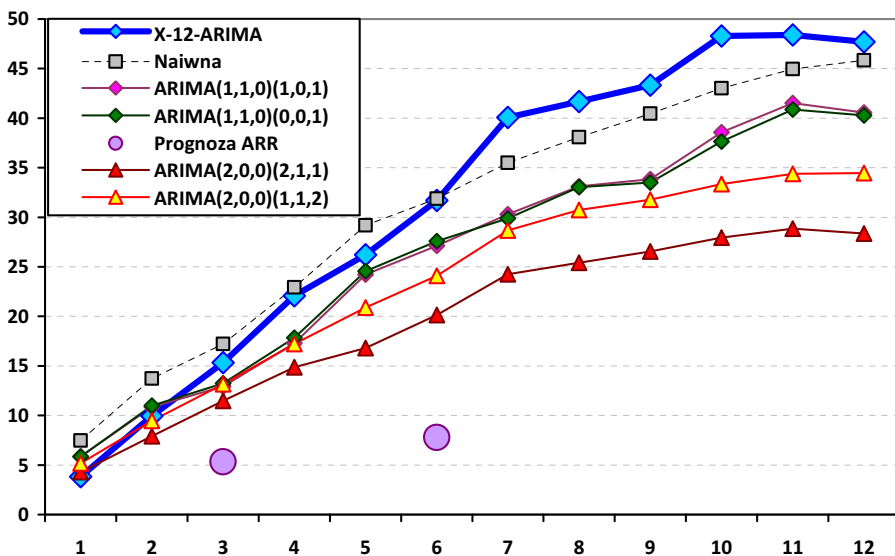


Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku cen żyta wnioski odnoszące się do trafności prognoz modeli ARIMA z jednokrotnym różnicowaniem pozostają tożsame z wyciągniętymi z analizy prognoz cen pszenicy. Podobne warunki cenowe sprawiły, że prognozy modeli z różnicowaniem sezonowym, których przebieg oscyluje wokół wartości średnich szeregu, cechowały się dużo wyższą trafnością od prognoz modeli różnicowanych z krokiem pierwszych. Te ostatnie, tworzone w I połowie roku 2011, są nawet silniej przeszacowane niż miało to miejsce w przypadku prognoz cen pszenicy.

**Rysunek 6.3.4. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen żyta w zależności od horyzontu prognozowania**



Źródło: opracowanie własne.

Wartości błędów wszystkich prognoz cen żyta zawarto na rysunku 6.3.4. Modele jednokrotnie różnicowane pozwalają na uzyskiwanie prognoz dokładniejszych od prognoz z modeli naiwnych czy też modeli X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS. Dotyczy to nie tylko prognoz modeli z krokiem sezonowym, ale również prognoz modeli różnicowanych z krokiem pierwszym. Zdecydowanie najniższe błędy uzyskano na podstawie modelu ARIMA(2,0,0)(2,1,1). W przypadku prognoz dwunastomiesięcznych jedynie dla tego modelu wartość MAPE nie przekroczyła 30%. Mimo widocznej poprawy w stosunku do dokładności prognoz z wykorzystaniem automatycznych procedur, prognozy ekspertów ARR charakteryzowały się zdecydowanie najmniejszymi błędami.

### 6.3.3. Mleko

Na bazie testu ADF bez i z wyrazem wolnym, stwierdzono, że szeregi czasowe logarytmowanych cen mleka nie są stacjonarne. Jednak zarówno różnicowanie z krokiem pierwszym, jak i różnicowanie z krokiem sezonowym pozwala uzyskać szeregi stacjonarne (rozdział 2.2).

Do sporządzenia prognoz wybrano dwa modele różnicowane z krokiem pierwszym i jeden różnicowany z krokiem sezonowym, których statystyki zawarto w tabeli 6.3.3. Oprócz stałych i parametru  $\theta_1$  w modelu (2,0,1)(1,1,2), wszystkie pozostałe współczynniki pozostają statystycznie istotne. Na poziomie istotności 0,05 reszty wszystkich prezentowanych modeli posiadają cechy rozkładu normalnego, a ponadto nie występuje efekt ARCH. Reszty nie są również wzajemnie skorelowane, na co wskazują wyniki testu Q Ljung-Boxa dla dwunastu opóźnień. Jedynie w modelu (1,1,0)(2,0,0) wartość funkcji ACF przekracza poziom istotności dla opóźnienia 24 miesięcy.

**Tabela 6.3.3. Wybrane charakterystyki modeli ARIMA dla cen (ln) mleka**

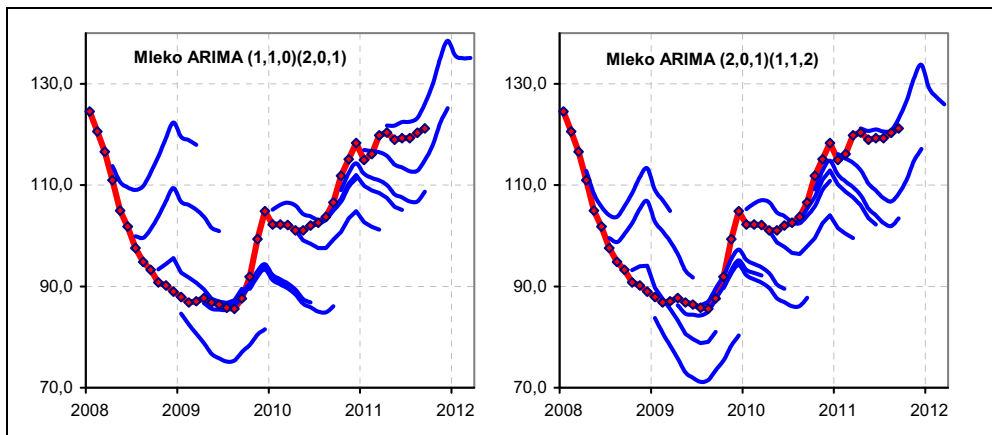
Model	(2,0,1)(1,1,2)		(1,1,0)(2,0,1)		(1,1,0)(2,0,0)	
Oszacowania modelu						
	Współczynnik	p	Współczynnik	p	Współczynnik	p
const	0,0022	0,0041	0,0000	0,9897	0,0004	0,7645
phi_1	1,8251	0,0000	0,6757	0,0000	0,7130	0,0000
phi_2	-0,8538	0,0000				
Phi_1	-0,6249	0,0009	0,7492	0,0000	0,3115	0,0000
Phi_2			0,2149	0,0164	0,3690	0,0000
theta_1	-0,3360	0,0028				
Theta_1	-0,1934	0,3645	-0,6375	0,0000		
Theta_2	-0,3936	0,0195				
Statystyki resztowe						
AIC	-865,617		-854,370		-839,881	
Se	0,0151		0,0159		0,0170	
Chi-kwadrat	5,6308	0,0599	1,6769	0,4324	2,5164	0,2842
LM <sub>ARCH</sub> (12)	13,4554	0,3368	20,9654	0,0509	17,6488	0,1268
Q Ljung-Boxa (12)	6,6457	0,880	8,2465	0,766	7,1144	0,850

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku cen mleka tylko jeden model różnicowany z krokiem sezonowym okazał się wyraźnie lepiej dopasowany od pozostałych. Dlatego też analizowane są prognozy tylko trzech modeli ARIMA z jednokrotnym różnicowaniem. Odmienny – w stosunku do rynku zbóż – przebieg cen na rynku mleka skutkuje mniejszymi różnicami pomiędzy prognozami tworzonymi przy wykorzystaniu modeli różnicowanych z krokiem pierwszym a różnicowanych z kro-

kiem sezonowym. W przypadku prognoz obu typów modeli widać wyraźny wpływ sezonowości, co zaprezentowano na rysunku 6.3.5.

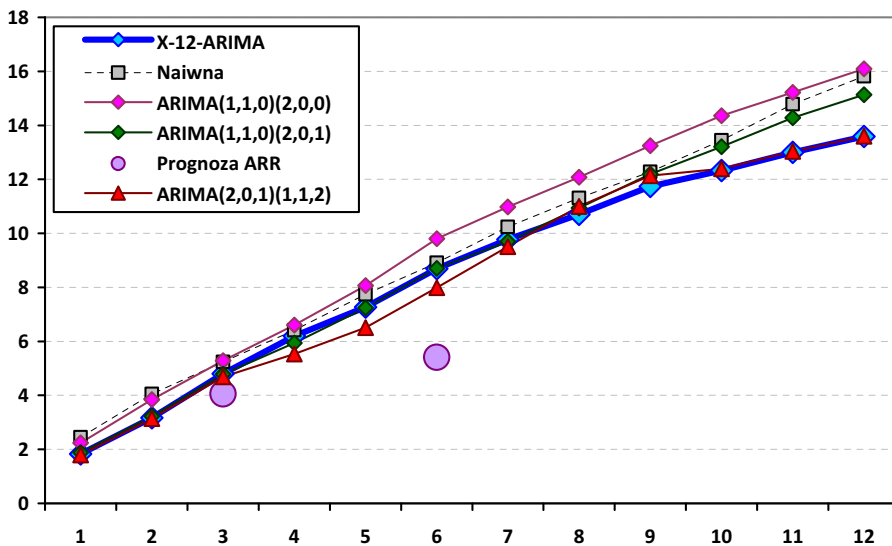
**Rysunek 6.3.5. Prognozy wygasłe cen mleka (zł/hl)uzyskane na podstawie modeli: ARIMA (1,1,0)(2,0,1) i ARIMA (2,0,1)(1,1,2)**



Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

Źródło: opracowanie własne.

**Rysunek 6.3.6. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen mleka w zależności od horyzontu prognozowania**



Źródło: opracowanie własne.

Jak wynika z rysunku 6.3.6, wartości MAPE dla prognoz sporządzanych przy wykorzystaniu różnego rodzaju modeli nie różnią się od siebie znacząco. W przypadku prognoz 12-miesięcznych różnice nie przekraczają 2,5 p.p. Natomiast wartości bezwzględne błędów prognoz są znacząco niższe niż w przypadku cen zbóż. Prognozy modeli różnicowanych z krokiem pierwszym okazały się mniej trafne niż prognoz modelu X-12-ARIMA. Natomiast prognozy modeli różnicowanych z krokiem sezonowym są od tych ostatnich wyraźnie trafniejsze wyłącznie dla horyzontu prognoz od 4 do 6 miesięcy. Jedyną prognozą wyróżniającą się *in plus* pozostaje sześciomiesięczna prognoza sporządzona przez Zespół Ekspertów ARR.

#### 6.3.4. *Żywiec wieprzowy*

Odmienne niż dla pozostałych rynków, w przypadku cen żywca wieprzowego, modele ARIMA oparte zostały o dane nielogarytmowane. Poziomy szeregi czasowych ceny wieprzowiny mają charakter bliski stacjonarności, na co wskazują testy ADF zarówno z wyrazem wolnym, jak i z trendem liniowym. Stąd jednoczesne obliczanie przyrostów z krokiem pierwszym oraz sezonowym zastosowane w procedurach automatycznych modeli X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS może prowadzić do ich przeróżnicowania. Wydaje się, że wystarczające winno być różnicowanie z krokiem pierwszym lub sezonowym (szczególnie z uwagi na widoczną sezonowość). Testy pierwiastka jednostkowego ADF zarówno bez, jak i z wyrazem wolnym dla powyższych różnic pozwalają odrzucić hipotezę zerową o niestacjonarności tych szeregów.

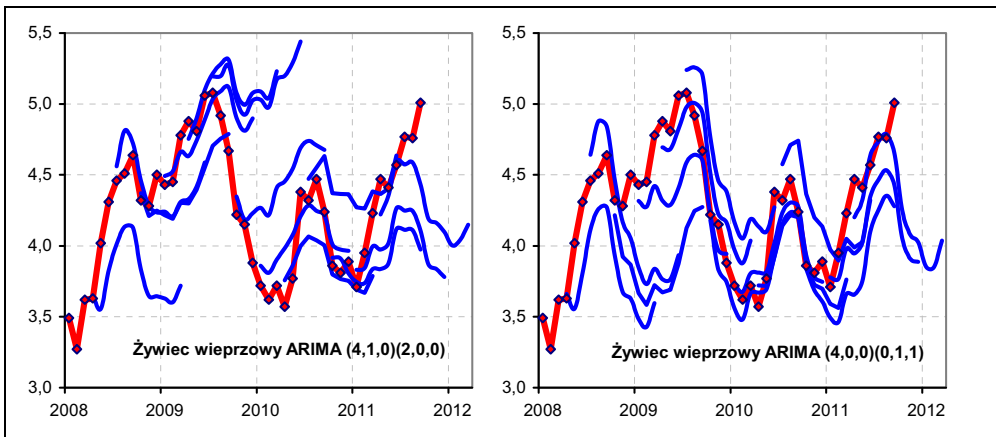
Do prognozowania cen wołowiny wybrano dwa modele różnicowane z krokiem pierwszym i dwa z krokiem dwunastym. Statystyki tych modeli przedstawiono w tabeli 6.3.4. Ogólnie dopasowanie modeli różnicowanych z krokiem sezonowym jest lepsze niż z krokiem niesezonowym. Reszty wszystkich modeli wykazują cechy rozkładu normalnego (chi-kwadrat). Brak jest zależności nieliniowych w resztach, tzw. efektu ARCH. Modele te pozwalają na ujęcie głównych zależności liniowych, na co wskazuje brak autokorelacji w resztach. Zauważyć też można, że stosunkowo duża liczba współczynników nie jest statystycznie istotna. Dotyczy to przede wszystkim parametrów  $\theta_2$  i  $\theta_3$  w modelach różnicowanych z krokiem pierwszym oraz  $\theta_1$  i  $\theta_2$  w modelach różnicowanych sezonowo. Natomiast wszystkie ostatnie parametry są statystycznie istotne.

**Tabela 6.3.4. Wybrane charakterystyki modeli ARIMA dla cen żywca wieprzowego**

Model	(4,0,0)(0,1,1)		(4,0,0)(2,1,1)		(4,1,0)(2,0,0)		(3,1,0)(2,0,0)	
Oszacowania modelu								
	Współcz.	p	Współcz.	p	Współcz.	p	Współcz.	p
Const	0,0044	0,3892	0,0128	0,2283	0,0008	0,9617	0,0012	0,9410
phi_1	0,9459	0,0000	0,9056	0,0000	0,1038	0,2166	0,0592	0,4725
phi_2	0,1214	0,2906	0,1546	0,2571	0,1169	0,1510	0,1086	0,1812
phi_3	0,0635	0,5582	0,0699	0,5482	0,2148	0,0086	0,2161	0,0082
phi_4	-0,2322	0,0026	-0,2290	0,0053	-0,1700	0,0388		
Phi_1			-0,3700	0,0020	0,2669	0,0018	0,2870	0,0007
Phi_2			-0,2293	0,0573	0,3042	0,0003	0,3277	0,0001
Theta_1	-0,7447	0,0000	-0,4807	0,0007				
Statystyki resztowe								
AIC	-76,130		-62,923		-48,807		-47,767	
Se	0,1853		0,1831		0,2024		0,2040	
Chi-kwadrat	1,5870	0,4523	4,3822	0,1118	0,6317	0,7292	0,7544	0,6858
LM <sub>ARCH</sub> (12)	14,2473	0,2852	17,0268	0,1486	9,3137	0,6759	9,8046	0,6331
Q Ljung-Boxa (12)	12,7066	0,391	12,1605	0,433	10,0448	0,612	16,3778	0,175

Źródło: opracowanie własne.

**Rysunek 6.3.7. Prognozy wygasłe cen żywca wieprzowego (zł/kg) uzyskane na podstawie modeli: ARIMA (4,1,0)(2,0,0) i ARIMA (4,0,0)(0,1,1)**



Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

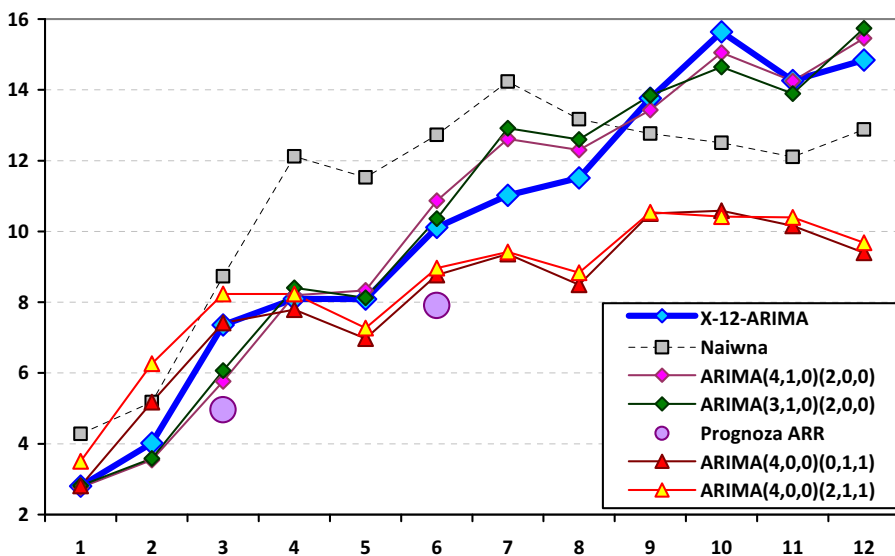
Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 6.3.7 oraz 6.3.8 przedstawiono kształtowanie się prognoz wygasłych oraz błędy tych prognoz. Dokładność prognoz opartych na modelach różnicowanych z krokiem pierwszym jest porównywalna z dokładnością prognoz modeli X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS. Generalnie, znacznie dokładniejsze prognozy uzyskano na podstawie modeli opartych na sezonowych



różnicach. Modele różnicowane z krokiem pierwszym pozwalają na uzyskanie nieznacznie dokładniejszych prognoz o horyzoncie do 3 miesiąca niż model z różnicowaniem sezonowym. Natomiast dla prognoz powyżej trzeciego miesiąca znacząco trafniejsze pozostają te sporządzane na bazie modeli różnicowanych z krokiem sezonowym. Warto też zwrócić uwagę, że średnia wartość błędów prognoz wygasłych o horyzoncie czasowym od 9-12 miesiąca wynosi około 10%, co biorąc pod uwagę zmienność cen wieprzowiny, należy uznać za wynik bardzo dobry.

**Rysunek 6.3.8. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen żywca wieprzowego w zależności od horyzontu prognozowania**



Źródło: opracowanie własne.

Prognozy cen wieprzowiny uzyskiwane z wykorzystaniem najlepszych modeli szeregów czasowych charakteryzują się tylko nieznacznie wyższymi błędami niż prognozy ekspertów. Przy czym jak wspomniano wcześniej, do prognozowania na okres do trzech miesięcy należy używać innych modeli niż do budowy prognoz na dalsze horyzonty czasowe.

### 6.3.5. Żywiec wołowy

Szeregi czasowe logarytmowanych cen wołowiny nie są stacjonarne (dla testu ADF z wyrazem wolnym  $\tau = -0,32$ ;  $p = 0,91$ ). Za stacjonarne można uznać pierwsze przyrosty różnic logarytmicznych cen ( $\tau = -10,47$ ;  $p = 0,01$ ). Według

testu ADF bez wyrazu wolnego, różnice między logarytmicznymi cenami oddalonymi od siebie o 12 miesięcy, są również stacjonarne ( $\tau = -2,31$  przy  $p = 0,02$ ).

Ceny żywca wołowego prognozowano przy wykorzystaniu czterech modeli, o charakterystykach zawartych w tabeli 6.3.5. Wszystkie współczynniki, oprócz wyrazu wolnego, są statystycznie istotne. Przy poziomie istotności 0,1 składnik losowy należy uznać za posiadający cechy rozkładu normalnego. Nie jest on skorelowany z poprzednimi jego obserwacjami, na co wskazują wartości statystyki Q testu Ljung-Boxa, ani nie podlega efektowi ARCH.

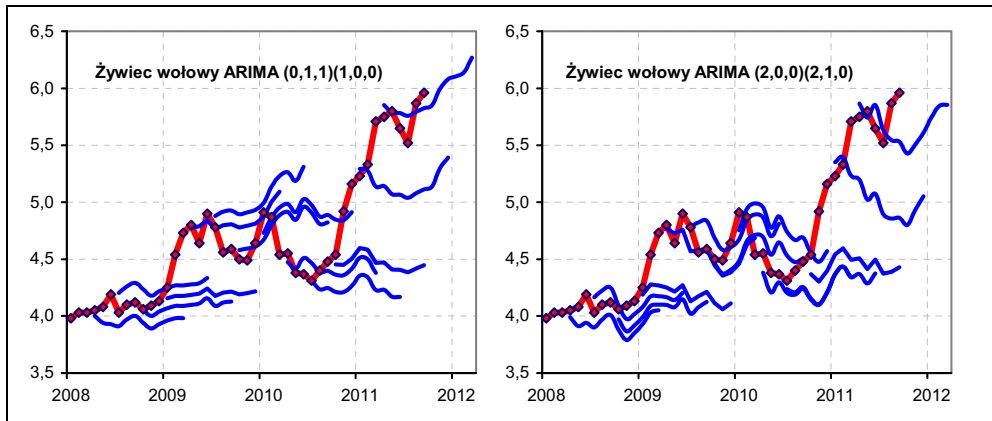
**Tabela 6.3.5. Wybrane charakterystyki modeli ARIMA dla cen (ln) żywca wołowego**

Model	(2,0,0)(0,1,1)		(2,0,0)(2,1,0)		(1,1,0)(1,0,0)		(0,1,1)(1,0,0)	
Oszacowania modelu								
	Współcz.	p	Współcz.	p	Współcz.	p	Współcz.	p
const	0,0015	0,0527	0,0034	0,1537	0,0020	0,2717	0,0024	0,2744
phi_1	1,2653	0,0000	1,3094	0,0000	0,2626	0,0004		
phi_2	-0,3135	0,0000	-0,3529	0,0000				
Phi_1			-0,7218	0,0000	0,2650	0,0007	0,2756	0,0000
Phi_2			-0,3876	0,0001				
theta_1							0,2624	0,0002
Theta_1	-0,7684	0,0000						
Statystyki resztowe								
AIC	-801,943		-669,500		-797,578		-800,404	
Se	0,0225		0,0244		0,0233		0,0231	
Chi-kwadrat	11,9403	0,0026	5,2546	0,0723	9,0718	0,0107	7,4928	0,0236
LM <sub>ARCH</sub> (12)	44,6526	0,0000	29,7894	0,0030	32,8547	0,0010	32,9440	0,0010
Q Ljung-Boxa (12)	15,5238	0,214	15,7177	0,205	13,1328	0,359	12,4806	0,408

Źródło: opracowanie własne.

Prognozy cen żywca wołowego sporządzane przy wykorzystaniu modeli ARIMA z jednokrotnym różnicowaniem przedstawiono na rysunku 6.3.9. Zauważyć można, że zazwyczaj nie wychwytywały one prawidłowo punktów zwrotnych, stąd największe błędy obserwuje się bezpośrednio po takich gwałtownych zmianach poziomu i kierunku cen.

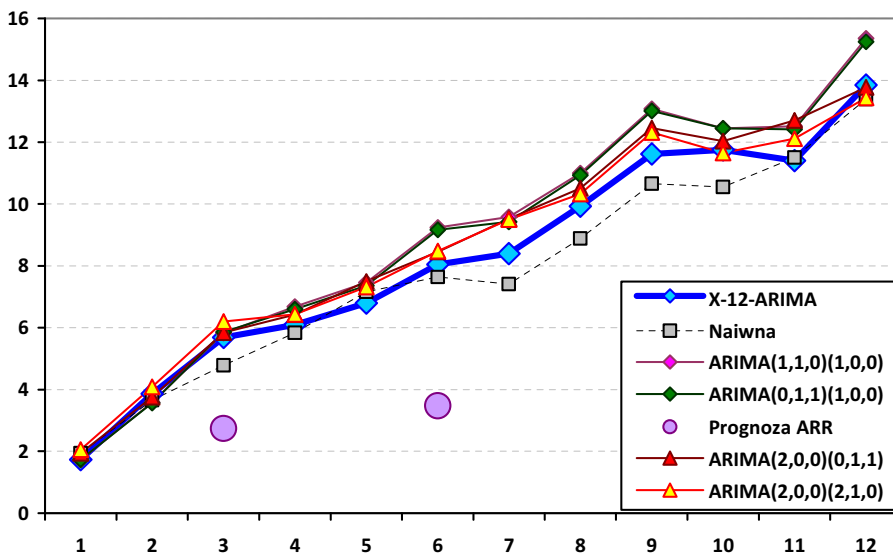
**Rysunek 6.3.9. Prognozy wygasłe cen żywca wołowego (zł/kg) uzyskane na podstawie modeli: ARIMA (0,1,1)(1,0,0) i ARIMA (2,0,0)(2,1,0)**



Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

Źródło: opracowanie własne.

**Rysunek 6.3.10. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen żywca wołowego w zależności od horyzontu prognozowania**



Źródło: opracowanie własne.

Porównanie wartości błędów MAPE dla omawianych rodzajów prognoz przedstawiono na rysunku 6.3.10. Wartości błędów prognoz wygasłych MAPE cen żywca wołowego pozostają na podobnym poziomie co wartości tychże dla

cen wieprzowiny. Zauważyć można też brak większych różnic pomiędzy błędami prognoz opracowanych przy wykorzystaniu różnych modeli szeregów czasowych. Wartość MAPE prognoz wygasłych modeli ARIMA z jednokrotnym różnicowaniem jest nieznacznie wyższa niż prognoz wg modelu X-12-ARIMA.

Wykorzystanie modeli szeregów czasowych nie gwarantuje uzyskania prognoz dokładniejszych w stosunku do naiwnego podejścia do formułowania prognoz. Znowu bezkonkurencyjne okazały się prognozy ekspertów ARR, dla których średni poziom błędów w okresie objętym weryfikacją był o ponad połowę niższy od błędów z prognoz ilościowych.

### 6.3.6. Żywiec drobiowy

Modele cen żywca drobiowego oparto na danych logarytmowanych. Szeregi czasowe logarytmów tych ceny mają charakter niestacjonarny, co zostało potwierdzone testem ADF zarówno bez, jak i z wyrazem wolnym. Różnicowanie cen drobiu z krokiem pierwszym pozwala na uzyskanie stacjonarnego szeregu czasowego. Podobnie stacjonarność szeregów można uzyskać poprzez różnicowanie tylko z krokiem dwunastym.

**Tabela 6.3.6. Wybrane charakterystyki modeli ARIMA dla cen (ln) żywca drobiowego**

Model	(2,0,0)(0,1,1)		(2,0,0)(2,1,0)		(1,1,0)(3,0,0)		(1,1,0)(1,0,1)	
Oszacowania modelu								
	Współcz.	p	Współcz.	p	Współcz.	p	Współcz.	p
stała	-0,0003	0,7507	0,0012	0,6889	0,0009	0,7552	-0,0004	0,7164
phi_1	1,1965	0,0000	1,1455	0,0000	0,2216	0,0093	0,2543	0,0000
phi_2	-0,2715	0,0000	-0,2295	0,0055				
Phi_1			-0,6995	0,0000	0,1896	0,0207	0,8946	0,0000
Phi_2			-0,4234	0,0000	0,1742	0,0411		
Phi_3					0,2927	0,0010		
Theta_1	-0,7399	0,0000					-0,6843	0,0000
Statystyki resztowe								
AIC	-652,698		-547,083		-550,468		-651,444	
Se	0,0349		0,0370		0,0366		0,0350	
Chi-kwadrat	11,9856	0,0025	7,2640	0,0265	9,1956	0,0101	11,7824	0,0028
LM <sub>ARCH</sub> (12)	26,0741	0,0105	20,6529	0,0557	14,2338	0,2860	19,4705	0,0778
Q Ljung-Boxa 12	15,7839	0,201	16,6235	0,164	15,7232	0,204	15,4317	0,219

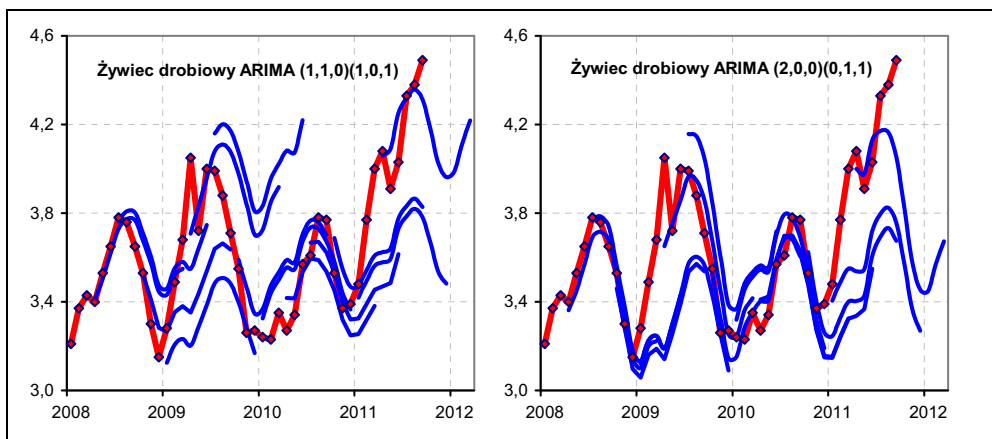
Źródło: opracowanie własne.

Do prognozowania cen żywca drobiowego wybrano cztery modele. Ich wybrane statystyki przedstawiono w tabeli 6.3.6. Wszystkie współczynniki wybranych modeli, oprócz wyrazów wolnych, są statystycznie istotne. Składnik

resztowy żadnego z modeli nie posiada rozkładu normalnego (chi-kwadrat), natomiast nie stwierdza się w nich zależności liniowych. W przypadku niektórych modeli mamy do czynienia z tzw. efektem ARCH.

Dość stabilny charakter wahań cen na rynku żywca drobiowego jest najpewniej przyczyną dobrego dopasowania prognoz wygasłych do rzeczywistych cen drobiu, co widać na rysunku 6.3.11. Zaobserwować też tu można, wspomniane już przy okazji omawiania poprzednich rynków, dążenie prognoz modelu ARIMA różnicowanych z krokiem sezonowym do wartości średnich. Prognozy najmocniej odbiegają od cen rzeczywistych dla roku 2011, kiedy to doszło do nieobserwowanego w poprzednich latach wzrostu cen drobiu.

**Rysunek 6.3.11. Prognozy wygasłe cen żywca drobiowego (zł/kg) uzyskane na podstawie modeli: ARIMA (1,1,0)(1,0,1) i ARIMA (2,0,0)(0,1,1)**



Oznaczenia: prognozy wygasłe – linia niebieska, ceny rzeczywiste – linia czerwona.

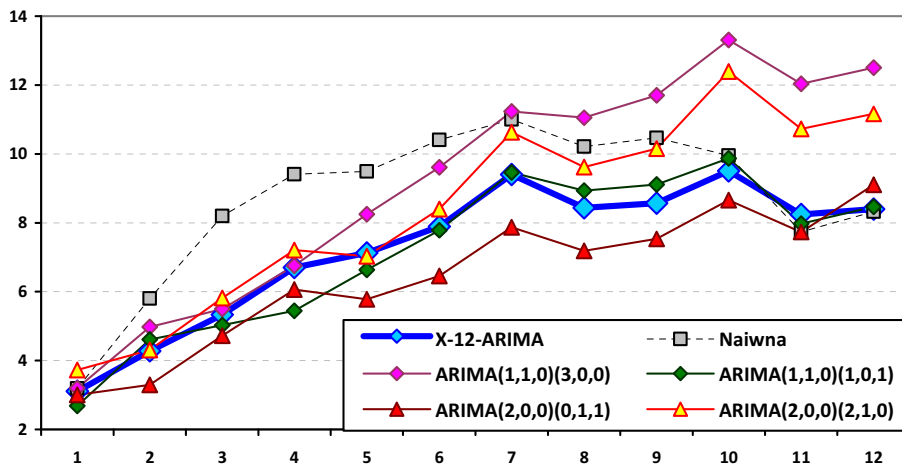
Źródło: opracowanie własne.

Specyficzna sytuacja cenowa na rynku drobiu sprawiła, że inaczej niż na dotychczas omawianych rynkach, istnieje duże zróżnicowanie wartości MAPE pomiędzy prognozami modeli różnicowanych z tym samym krokiem (wykres 6.3.12). Model ARIMA (2,0,0)(0,1,1) daje wyraźnie trafniejsze prognozy niż model ARIMA (2,0,0)(2,1,0). Podobnie w przypadku modeli różnicowanych z krokiem pierwszym wartości MAPE prognoz modelu ARIMA (1,1,0)(1,0,1) są ewidentnie niższe od błędów z modelu (1,1,0)(3,0,0).

Na wykresie 6.3.12, przedstawiającym wartości błędów prognoz wygasłych cen drobiu, zauważyć też należy, że wartości MAPE wszystkich omawianych prognoz są stosunkowo nieduże. Niemniej dla prognoz formułowanych na 11 i 12 miesiąc żaden z przedstawionych modeli nie jest wyraźnie lepszy od metody naiwnej. Generalnie do prognozowania możemy rekomendować modele:

ARIMA (2,0,0)(0,1,1), ARIMA (1,1,0)(1,0,1) oraz modele X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS, których poziom średnich błędów nie odbiegał znacząco od dwóch pierwszych modeli.

**Rysunek 6.3.12. Błędy MAPE (%) prognoz wygasłych cen żywca drobiowego w zależności od horyzontu prognozowania**



Źródło: opracowanie własne.

Wyniki dokładności prognoz zaprezentowanych w rozdziale 6.3 wskazują, że trafność poszczególnych modeli najczęściej nie jest powiązana z ich złożonością czy statystycznymi miarami dopasowania. Prognozy opracowane na bazie najbardziej skomplikowanych i cechujących się najlepszym dopasowaniem do danych empirycznych modeli X-12-ARIMA czy TRAMO/SEATS okazały się w większości przypadków gorsze niż prognozy stosunkowo prostych modeli ARIMA. Zaobserwować też można wyższą zdolność przewidywania w oparciu o modele ARIMA budowane na danych różnicowanych z krokiem sezonowym, niż różnicowanych z krokiem pierwszym. Szczególnie wyraźnie zauważyć to można na przykładzie prognoz cen zbóż czy wieprzowiny.

Najistotniejszym wnioskiem jest zaś, że różnica pomiędzy trafnością prognoz opracowanych na bazie zaawansowanych metod szeregów czasowych a metod naiwnych jest stosunkowo nieduża. Dotyczy to głównie prognoz cen mleka, wieprzowiny i żywca wołowego. Najmniejszymi wartościami MAPE cechowały się prognozy ekspertów ARR. Były one w wielu przypadkach wręcz bezkonkurencyjne.



## Podsumowanie

Przystępując do badań, autorzy postawili sobie za cel ocenę przydatności metod szeregów czasowych w krótkookresowym prognozowaniu cen surowców rolnych. Literatura dostarcza wielu potencjalnych jednorównaniowych modeli, które mogą znaleźć praktyczne zastosowanie w prognozowaniu cen. Należą do nich modele ekstrapolacji funkcji trendu, modele adaptacyjne, modele autoregresji i średniej ruchomej czy też inne modele ujmujące dynamikę szeregów czasowych w postaci nieobserwowalnych komponentów.

Dobór modelu powinien mieć charakter indywidualny w zależności od charakterystyk szeregu czasowego obrazujących kształtowanie się zjawiska w czasie. Stąd też autorzy, decydując o zastosowanych metodach, kierowali się nie tylko ich właściwościami, ale też brali pod uwagę strukturę szeregów czasowych badanych zmiennych. Analizę przeprowadzono w oparciu o sześć szeregów czasowych cen najważniejszych surowców rolnych w Polsce: zbóż (pszenica i żyto), mleka i mięsa (żywca wieprzowego, drobiowego, i wołowego). Badania empiryczne przeprowadzone z wykorzystaniem modeli dekompozycji szeregów czasowych X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS (rekomendowanych przez Eurostat) wykazały, że szeregi czasowe cen tych surowców rolnych charakteryzują się złożoną strukturą zmienności. Obok trendu obserwujemy wahania cykliczne, sezonowe oraz nieregularne. Na niektórych rynkach mamy do czynienia ze zmianami strukturalnymi zaburzającymi obserwowane prawidłowości. Modele dekompozycji charakteryzowały się dobrymi własnościami, co zostało potwierdzono przez szereg testów statystycznych.

Przedstawimy teraz najważniejsze wnioski dotyczące prawidłowości obserwowanych na poszczególnych rynkach w latach 1996-2011. Najważniejszym komponentem zmienności cen żyta oraz cen pszenicy są wahania długookresowe, a w szczególności wahania cykliczne. Obserwujemy dosyć regularne cykle o długości blisko czterech lat o wzrastającej w czasie amplitudzie obrazującej wzrost ryzyka cenowego. To od ich prawidłowego uchwycenia w największym stopniu zależy dokładność prognoz. Specyfika produkcji zbóż powoduje częste i niespodziewane zaburzenia struktury szeregów czasowych, co ma odzwierciedlenie w postaci nietypowych obserwacji. Z reguły są one wywołane niekorzystnymi warunkami pogodowymi i są zlokalizowane w sąsiedztwie punktów zwrotnych trendu, co obniża wiarygodność prognoz oszacowanych metodami bazującymi na modelach szeregów czasowych.

Zmiany uwarunkowań gospodarczych związanych z przystąpieniem Polski do Unii Europejskiej całkiem inaczej wpłynęły na procesy generujące ceny



żyta i ceny pszenicy w Polsce. W przypadku cen pszenicy integracja europejska nie miała większego, znaczenia w przeciwieństwie do cen żyta. Dotyczy to głównie skali i charakteru wahań sezonowych. W przypadku cen pszenicy wzorzec wahań sezonowych ulega powolnym zmianom w czasie, ale jest stabilny. Wpływ czynników sezonowych na zmiany cen jest stosunkowo niewielki, gdyż amplituda zmian sezonowych oscylowała od około 95% (sierpień – listopad) do 105% (maj i czerwiec). W przypadku cen żyta wraz z integracją i zaprzestaniem interwencji rynkowej zmienił się wzorzec wahań sezonowych. Do roku 2004 był on podobny do obserwowanego na rynku pszenicy (przy czym amplituda wynosiła około 16 p.p.). Po zaniechaniu interwencji wzrosła się niepewność, co ma odzwierciedlenie we wzroście amplitud do około 20 p.p. W ostatnich latach najwyższe ceny obserwujemy w lutym (8% powyżej trendu) zaś najniższe w lipcu (12% poniżej długookresowego trendu).

Ceny mleka w latach 1996-2011 charakteryzowały się długookresowym wzrostem. Wynika on z ogólnych procesów inflacyjnych oraz tendencji obserwowanych na rynkach światowych. Obserwujemy również znaczne wahania cykliczne, o dosyć nieregularnej długości i amplitudzie. Przeciętna długość zmian cyklicznych wynosiła około 35-37 miesięcy. Wzorzec wahań sezonowych mleka ulegał powolnym zmianom w czasie. Najniższy poziom cen mleka w roku był obserwowany w miesiącach letnich (czerwiec, lipiec, sierpień – 5% poniżej trendu), a maksymalny w grudniu (ok. 5% powyżej trendu).

Szeregi czasowe cen żywca wieprzowego oraz cen żywca drobiowego mają wiele podobnych właściwości, co sugeruje istnienie powiązań pomiędzy tymi rynkami. Przede wszystkim, charakteryzują się podobnymi cyklami, które mają największy udział w ich zmienności. Ich długość wynosiła blisko 4 lata, co można powiązać z tzw. „cyklem świńskim”. Kształt wahań sezonowych na obydwu rynkach jest niemal identyczny. Najwyższe ceny skupu żywca wieprzowego obserwujemy w sierpniu i wrześniu, zaś najniższe w styczniu i lutym (amplituda wahań, przy założeniu modelu addytywnego, wynosi około 70 groszy). Ceny drobiu najwyższe są w lipcu-wrześniu zaś najniższe w grudniu i styczniu (amplituda wahań sezonowych to około 50 groszy). Wzorce wahań sezonowych ulegają powolnym zmianom w czasie, w szczególności obserwuje się systematyczny wzrost cen w lipcu. W obydwu przypadkach mamy do czynienia z tzw. efektem Wielkanocy polegającym na wzroście cen w tym czasie. Ceny żywca wieprzowego są w tym czasie wyższe średnio o ok. 7 gr./kg zaś żywca drobiowego o 5 gr./kg.

Ceny żywca wołowego wykazują nieco inny charakter niż ceny pozostałych dwóch gatunków żywca. Na ich kształtowanie wpływ miała likwidacja barier handlowych wraz z przystąpieniem Polski do Unii Europejskiej. Stąd też

wraz z tym momentem ceny wzrosły o około 50%. Zaobserwowano jeszcze kilka innych załamań prawidłowości, które to odstępstwa związane były głównie z zastrzeżeniami weterynaryjnymi. Tego typu zmiany mają charakter szokowy i zwiększają niepewność prognozowania. Poziom cen skupu żywca wołowego w dużo większym stopniu wyznaczany był przez długookresowy trend, a wpływ czynnika sezonowego był mniej ewidentny. Amplitudy wahań sezonowych wynosiły około 6-8 p.p., zaś sam przebieg sezonowości ulegał relatywnie silnym zmianom w czasie. Wyodrębnione wahania cykliczne nie obejmują wahań odpowiadających długości „cyklu świńskiego”, jak w przypadku cen trzody i cen żywca drobiowego, ale mają własną, odrębną strukturę (dominacja cykli 9-miesięcznych oraz o okresie dwa lata i trzy miesiące). Z uwagi na krótki okres analizy oraz konwergencję cen krajowych do cen unijnych nie są widoczne typowe cykle bydlęce.

W świetle powyższych analiz do prognozowania wybrano modele bazujące na metodologii ARIMA, które wg literatury mają dosyć dobre zdolności opisu szeregów czasowych charakteryzujących się złożoną strukturą. Modele te mają charakter dosyć uniwersalny, a ich różne specyfikacje pozwalają na ujęcie zmieniających się w czasie kierunków trendu czy wahań sezonowych. W celu ujęcia nietypowych zmian modele te rozszerzono o zmienne sztuczne. Stąd przyjęły one formę modeli RegARIMA oraz TRAMO, których identyfikacja odbywała się według pewnych automatycznych procedur zaimplementowanych w programie rekomendowanym przez Eurostat – DEMETRA+. Wyestymowane obiema metodami modele prognostyczne bardzo dobrze oddawały charakter obserwowanych prawidłowości poszczególnych rynków. Praktycznie spełniały warunki nakładane modelom ekonometrycznym w zakresie istotności i stabilności parametrów, dopasowania modelu do danych empirycznych oraz rozkładu składnika losowego.

W celu sprawdzenia, na ile dokładne prognozy można uzyskać na podstawie tych modeli, przeprowadzono analizę prognoz wygasłych o horyzoncie do 12 miesięcy. Wyniki okazały się dosyć zaskakujące. Modele szeregów czasowych RegARIMA oraz TRAMO, które charakteryzowały się dobrymi własnościami statystycznymi, nie pozwoliły na uzyskanie prognoz przeciętnie dokładniejszych od prognoz uzyskiwanych na podstawie modeli naiwnych. W tym świetle oznacza to, że prognozowanie cen surowców rolnych na podstawie tych modeli nie przynosi żadnej korzyści. Uczestnicy rynku, którzy postępując zgodnie z oczekiwaniami naiwnymi nic nie zyskaliby, gdyby decyzje podejmowali na podstawie powyższych modeli.

Analiza przyczyn błędów prognoz pokazała, że nie pozwalają one na prawidłowe przewidywanie nie tylko w momentach zwrotnych, ale też w okresie do

pół roku po zmianie kierunku przebiegu cyklu. W ogóle nie umożliwiały odgadnięcia momentów zwrotnych, a kiedy taki moment nastąpił, dosyć późno identyfikowały zmiany. Prognozy uzyskiwane na podstawie powyższych modeli można porównać do oczekiwań ogółu rynku. Większość inwestorów również nie potrafi odgadnąć momentu załamania cen. Brak przewag w stosunku do modeli naiwnych jest też w pewnym sensie potwierdzeniem słabej hipotezy rynku efektywnego. Gdyby była pewność co do przyszłych cen, rynek szybko ustaliłby równowagę na tym poziomie.

Prognozy formułowane na podstawie modeli zaimplementowanych w metodach X-12-ARIMA (model RegARIMA) oraz TRAMO/SEATS (model TRAMO) były zdecydowanie gorsze od prognoz Zespołu Ekspertów przy ARR. Błędy prognoz cen zbóż na 3 i 6 miesięcy były około trzy razy wyższe niż prognoz eksperckich. W przypadku cen żywca wołowego prognozy eksperckie charakteryzowały się o połowę mniejszymi błędami. Najmniejsze różnice w błędach prognoz formułowanych na podstawie opinii ekspertów i prognoz z modeli szeregowych dotyczyły cen mleka i żywca wieprzowego.

Wśród przyczyn leżących u podstaw niskiej trafności prognoz opartych na modelach szeregowych wyróżnić należy zbyt dużą utratę informacji w wyniku przekształceń szeregowych, głównie dwukrotnego różnicowania danych. Osłabiło to siłę prawidłowości długookresowych, które mają największy wpływ na kształtowanie się zjawiska w czasie. Stąd w kolejnym kroku zdecydowano się ograniczyć liczbę różnicowań do jednego. Zrezygnowano również ze zmiennych regresyjnych mających na celu wyeliminowanie obserwacji odstających. Zrezygnowano z automatycznej procedury doboru liczby opóźnień na rzecz specyfikacji modeli w oparciu o wykresy ACF i PACF. Oszacowane modele były w miarę poprawne, ale często nie spełniały założenia o normalności rozkładu.

Prognozy pochodzące z modeli opartych na jednokrotnym różnicowaniu okazywały się z reguły bardziej dokładne niż prognozy opracowane na bazie bardziej skomplikowanych i cechujących się lepszym dopasowaniem do danych empirycznych modeli RegARIMA czy TRAMO. Zaobserwować też można wyższą przydatność predykcyjną modeli ARIMA różnicowanych z krokiem sezonowym, niż różnicowanych z krokiem pierwszym. Szczególnie wyraźnie zauważyć to można na przykładzie prognoz cen zbóż czy wieprzowiny. Błędy prognoz wygasłych cen zbóż i żywca wieprzowego z modeli ARIMA były o 1/3 niższe niż błędy prognoz obliczonych wg zautomatyzowanych procedur w programie DEMETRA+. Tym samym były również dokładniejsze od prognoz naiwnych. Na pozostałych rynkach dokładność prognoz była zbliżona do prognoz z modeli RegARIMA oraz TRAMO.

Wyniki badań mogą sugerować, że nie ma większego uzasadnienia stosowania metod szeregów czasowych do prognozowania cen surowców rolnych. To przypuszczenie sformułowane wynika stąd, że prognozy na ich podstawie obliczane nie są dokładniejsze w dłuższym okresie niż prognozy szacowane na podstawie metody naiwnej. Według badań prognozy wygasłe cen surowców z modeli szeregów czasowych są zdecydowanie nie konkurencyjne w stosunku do prognoz eksperckich.

Jest to tylko częściowo zasadne stwierdzenie. Można uznać bowiem, że prognozowanie jest bardziej sztuką niż nauką, stąd też uzyskiwanie przewag konkurencyjnych (np. poprzez dokładniejsze prognozowanie) odbywa się nie tylko dzięki odpowiedniemu zastosowaniu narzędzi badawczych, ale i merytorycznej weryfikacji prognoz. Stąd prognosta każdorazowo powinien sam decydować o postaci modelu i przyjmowanych założeniach. Każdą prognozę użytą na podstawie metod ilościowych należy ocenić pod kątem jej realności. Oznacza to, że stanowi ona tylko jedno ze źródeł informacji o przyszłym przebiegu zjawiska w czasie.

Należy podkreślić, że metody szeregów czasowych pozwalają na uzyskanie szeregu informacji o prawidłowościach, jakie występują w danych. Dzięki temu możliwe jest poszerzenie wiedzy analityków i uczestników rynku o trendach, charakterze wahań cyklicznych, wzorcach wahań sezonowych. Mając wyodrębnione komponenty można zbudować prognozę w mniej formalny sposób, łącząc twarde fakty z intuicją i wiedzą pozastatystyczną. Wiedza ta obejmuje również informacje, które nie znajdują odzwierciedlenia w danych historycznych. Jest ona szczególnie przydatna przy prognozowaniu przebiegu wahań cyklicznych. Trend i wahania sezonowe można przenosić w przyszłość w dosyć mechaniczny sposób. Nosi to w literaturze nazwę metody dekompozycji lub metody wskaźników. Niestety nie było możliwe przeprowadzenie wiarygodnej analizy prognoz wygasłych tego typu z uwagi na pewną subiektywność podejścia.

W przypadku bezpośredniego prognozowania na podstawie modeli szeregów czasowych ważne są założenia w zakresie mechanizmu generującego ceny. Wydaje się, że przy prognozowaniu powyżej trzech miesięcy nieuzasadnione jest założenie o stochastycznym trendzie cen. Ceny surowców rolnych są powiązane silnie z fundamentami i nie należy oczekiwać, aby trend uformowany w jakiejś fazie cyklu utrzymał się w dłuższym okresie. Reakcja producentów w postaci zwiększania produkcji w wyniku korzystnych cen lub jej zmniejszenia, gdy ceny są niekorzystne prowadzi do wahań, ale wokół pewnego trendu deterministycznego. Stąd lepiej i bezpieczniej jest założyć, że odchylenia cen mają miejsce wokół takiego trendu. Zresztą wahania cykliczne wokół trendu na wielu rynkach są dosyć regularne. Stąd w przypadku niestacjonarności szeregu

czasowego, lepszym sposobem usunięcia trendu jest jego eliminacja poprzez dopasowanie, najczęściej linowego trendu. Następnie można zastosować modele ARIMA do prognozowania tak przekształconych danych.

Nie zawsze możliwe jest bezpośrednio zastosowanie modeli szeregów czasowych do prognozowania cen surowców rolnych. Istnieją produkty (głównie owoce, warzywa), które pojawiają się sezonowo na rynku, stąd informacja dostępna jest tylko dla wybranych miesięcy w roku, niekoniecznie tych samych w kolejnych latach. Ich ceny są uwarunkowane lokalnie, w mniejszym stopniu wpływa na nie sytuacja na rynkach światowych. Tutaj metody szeregów czasowych pełnić mogą tylko rolę pomocniczą przy ocenie charakteru występujących prawidłowości. Dodatkowo istnieje na tych rynkach szereg informacji, np. po przymrozkach czy utrudnieniach handlowych, które mają duży wpływ na bieżącą sytuację, a nie mają odzwierciedlenia w historycznych danych.

Przedstawione wyniki badań są dużym zaskoczeniem dla autorów. Problematyka ta wymaga dalszych analiz i próby zastosowania innych modeli ekonometrycznych. Z uwagi na powiązania między rynkami warto rozważyć wektorowe modele autoregresji VAR oraz wektorowe modele korekty błędem VECM. Autorzy planują dalsze badania w tym zakresie.

## Literatura

- *An Introductory Course on Time Series Analysis*, 2005, [www.abs.gov.au](http://www.abs.gov.au).
- Borkowski B., Dudek A., Szczesny W., *Ekonometria. Wybrane zagadnienia*, PWN, Warszawa 2003.
- Box G.E.P., Jenkins G.M., *Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie*, PWN, Warszawa 1983.
- Cieślak M. (red.), *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- Czerwiński Z., Guzik B., *Prognozowanie ekonometryczne*, PWE, Warszawa 1980.
- Dittmann P., *Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Metody i ich zastosowanie*, Oficyna Wolters Kluwer Business, Kraków 2008.
- *ESS Guidelines on Seasonal Adjustment*, rok 2009, <http://www.cmf.org/pdf/ESS%20Guidelines%20on%20SA.pdf>.
- Evans M.K., *Practical business forecasting*, John Wiley & Sons, Oxford, 2003.
- Findley D., Monsell B., Bell W., Otto M., Chen M., *New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program*, "Journal of Business and Economic Statistics", 1998.
- Gomez, V., Maravall A., *Seasonal Adjustment and Signal Extraction in Economic Time Series*, [w:] Tsay R.S. (red.) *A Course in Time Series Analysis*, J. Wiley and Son, Nowy Jork 2001.
- Grudkowska S., Paśnicka E., *X-12-ARIMA i TRAMO/SEATS – empiryczne porównanie metod wyrównania sezonowego w kontekście długości próby*, Narodowy Bank Polski, „Materiały i Studia”, nr. 220, 2007.
- Grudkowska S., *Demetra+ User Manual*, Eurostat, 2011, [www.croportal.eu/sites/default/files/Demetra+%20User%20Manual\\_0.pdf](http://www.croportal.eu/sites/default/files/Demetra+%20User%20Manual_0.pdf)
- Gruszczyński M., Kuszewski T., Podgórska M. (red.), *Ekonometria i badania operacyjne*. PWN, Warszawa 2009.
- *Guide to Seasonal Adjustment with X-12-ARIMA*, Office of National Statistics (ONS), 2007, <http://www.ons.gov.uk/ons/guide-method/method-quality/general-methodology/time-series-analysis/guide-to-seasonal-adjustment.pdf>
- Guzik B., Appenzeller D., Jurek W., *Prognozowanie i symulacje: wybrane zagadnienia*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2007.

- Hamulczuk M., *Cykliczne zmiany na rynku trzody chlewnej w Polsce*, Rocznik Nauk Rolniczych, seria G, T.92, z.2, PAN, SGGW, Warszawa 2006.
- Hamulczuk M., Strasburger K., *Metoda Caterpillar-SSA w analizie i prognozowaniu zjawisk z wahaniami periodycznymi*. „Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych VIII”, Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2007.
- Hamulczuk M., Stańko S., *Prognozowanie cen podstawowych produktów na przykładzie pszenicy żywca wieprzowego*. [w:] *Zarządzanie ryzykiem cenowym a możliwości stabilizowania dochodów producentów rolnych – aspekty poznawcze i aplikacyjne*, pr. zbior. pod red. M. Hamulczuka i S. Stańki, IERiGŻ-PIB. Raport Programu Wieloletniego, nr 148, Warszawa 2009.
- Hamulczuk M. Stańko S., *Prognozowanie cen surowców rolnych – uwarunkowania i metody*, Komunikaty, Raporty Ekspertyzy, nr 547, IERiGŻ-PIB. Warszawa 2011.
- Heijman W., Krzyżanowska Z., Gędek S., Kowalski Z., *Ekonomika Zarys teorii*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa 1997.
- Kaiser R., Maravall A., *Seasonal Outliers in Time Series*, “Banco de España Working Papers”, nr 9915, 2002.
- Klein L.R., *Wykłady z ekonometrii*, PWE, Warszawa 1982.
- Kowalski A., Rembisz W., *Rynek rolny i interwencjonizm a efektywność i sprawiedliwość społeczna*, IERiGŻ-PIB, Warszawa 2005.
- Kufel T., *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu GRETL*, PWN, Warszawa 2007.
- Ladiray D., Quenneville B., *Seasonal Adjustment with X-11*, Springer, 2001.
- Lothian J., Morry M., *A Set of Quality Control Statistics for the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Method*, Statistics Canada Staff Paper STC1788E, 1978.
- Lütkepohl H., Krätzig M., *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge Univeristy Press, 2007.
- Maddala G.S., *Ekonometria*, PWN, Warszawa 2006.
- Makridakis S., Wheelwright S., *Forecasting Methods for Management*, John Wiley & Sons Inc., New York 1989.
- Makridakis S., Wheelwright S.C., Hyndman R.J., *Forecasting Method and Applications*, John Wiley & Sons, Nowy Jork 1998.
- Maravall, A., *Stochastic linear trends*, “Journal of Econometrics”, vol. 56, 5-37, 1993.

- Maravall, A., *An Application of the Tramo-Seats Automatic Procedure; Direct Versus Indirect Adjustment*, Computational Statistics & Data Analysis 50, 2006.
- Maravall, A., *Notes on Programs TRAMO and SEATS: TRAMO part*, 2008a, [http://www.bde.es/webbde/es/secciones/servicio/software/tramo/Part\\_II\\_Tramo.pdf](http://www.bde.es/webbde/es/secciones/servicio/software/tramo/Part_II_Tramo.pdf).
- Maravall, A., *Notes on Programs TRAMO and SEATS: SEATS part*, 2008b, [http://www.bde.es/webbde/es/secciones/servicio/software/tramo/Part\\_III\\_Seats.pdf](http://www.bde.es/webbde/es/secciones/servicio/software/tramo/Part_III_Seats.pdf).
- Milo W., *Szeregi czasowe*, PWE, Warszawa 1990.
- Planas C., *The Analysis of Seasonality in Economic Statistics: A Survey of Recent Developments*, Eurostat Working Group Dokument, 1998.
- Rembeza J., *Transmisja cen na rynku mięsa*, [w:] *Ewolucja rynku mięsnego i jej wpływ na proces transmisji cen*. IERiGŻ, Warszawa 2007.
- Stańko S., *Prognozowanie w rolnictwie*. Wydawnictwo SGGW, Warszawa 1999.
- Tomek W.G., Robinson K.L., *Kreowanie cen artykułów rolnych*, PWN, Warszawa 2001.
- Wu L. S.-Y., Hosking J., Ravishanker N., *Reallocation Outliers in Time Series*, „Journal of the Royal Statistical Society”, Series C, nr 2, 1993.
- *X-12-ARIMA Reference Manual, version 0.3*, US. Bureau of the Census, 2011, <http://www.census.gov/ts/x12a/v03/x12adocV03.pdf>
- Zeliaś A., *Teoria prognozy*, PWE, Warszawa 1997.



**EGZEMPLARZ BEZPŁATNY**

*Nakład: 585 egz.*

*Druk i oprawa: EXPOL Włocławek*